

CAHIER DE VACANCES EN PHYSIQUE POUR L'ENTRÉE EN 2^e ANNÉE – MINEURE GÉNÉRALISTE

01/03/2022– GUIDE POUR LES APPRENANTS

Préambule

Suite à l'actualité sanitaire, l'école d'ingénieurs CESI a mis en place un plan de remédiation en sciences pour cette rentrée 2022-2023.

Un accompagnement spécifique est proposé afin que vous abordiez dans de bonnes conditions les projets scientifiques à venir.

Votre objectif est de vous assurer :

- Qu'aucune lacune dans les bases de chimie, d'électrostatique, de magnétostatique, mécanique des fluides et thermique ne subsiste après votre travail préparatoire ;

Il vous appartient de profiter de ce cahier en vous y investissant pleinement. Sans votre engagement, rien ne sera possible, ni maintenant, ni après.

Trois ressources sont proposées en :

- Chimie pour le premier bloc de l'année en généraliste et BTP
- Mécanique des fluides et thermique pour le second bloc en généraliste et BTP
- Electrostatique et Magnétostatique pour le dernier bloc de l'année en généraliste

Des exercices sont proposés. Des corrigés sont proposés pour certains exercices. Si le corrigé n'est pas présent, une simple recherche internet suffira pour valider le résultat

Si vous identifiez que vous n'avez pas acquis certains chapitres en raison soit de l'actualité, soit en fonction de vos choix de spécialités dans le secondaire, nous vous incitons à profiter de ces ouvrages en libre accès (<https://www.livrescolaire.fr>) et de ce site très bien réalisé ([Université En Ligne \(unisciel.fr\)](http://UniversiteEnLigne.unisciel.fr)).

Contenu

Préambule.....	1
Apports théoriques à travailler pour les projets	3
Partie : La chimie	3
Les grands objectifs visés	3
Workshop sur le tableau périodique, les couches électroniques, le noyau atomique, les liaisons et changements d'état.....	3
Workshop sur les notions de mole, masse molaire, volume molaire, nombre d'Avogadro, masse volumique et densité.....	5
Workshop sur les bases d'une réaction chimique (réactifs, produits, réaction, équilibres, stœchiométrie).....	6
Workshop Architecture Moléculaire.....	8
Workshop Réactions acide-base.....	15
Workshop Réactions d'oxydoréduction (REDOX)	19
Partie 2 : La mécanique des fluides et la thermique	25
Les grands objectifs visés	25
Workshop Statique des fluides.....	25
Workshop RDM	28
Workshop Fluides	31
Workshop transferts thermiques	33
Cours et exercices d'électrostatique et magnétostatique	39
Chapitre 1 : Electrostatique.....	39
Chapitre 2 : Magnétostatique	81

Apports théoriques à travailler pour les projets

- [Structure microscopique de la matière \(unisciel.fr\)](http://unisciel.fr)
- [Chimie en solution aqueuse \(unisciel.fr\)](http://unisciel.fr)
- [Electrostatique \(unisciel.fr\)](http://unisciel.fr)
- [Magnétostatique \(unisciel.fr\)](http://unisciel.fr)

Partie : La chimie

Les grands objectifs visés

- Lire et interpréter le tableau périodique des éléments chimiques
- Représenter les configurations électroniques
- Calculer les masses molaires et les densités des différents composés chimiques
- Ecrire, équilibrer et interpréter des équations chimiques
- Déterminer l'équilibre chimique
- Ecrire et interpréter les équations de réactions chimiques : acido-basiques, oxydoréduction, etc.
- Déterminer les propriétés physiques de divers matériaux à partir de l'architecture moléculaire (liaisons chimiques, type d'atomes, etc.)
- Décrire la théorie de Lewis et l'appliquer pour déterminer la structure de composés
- Lire et interpréter les fiches de données de sécurité des produits chimiques, les normes de sécurité
- Lire et comprendre la signification des pictogrammes dans les fiches de sécurité des produits chimiques

Workshop sur le tableau périodique, les couches électroniques, le noyau atomique, les liaisons et changements d'état

1/ Ecrire les symboles chimiques des éléments suivants :

Or, Zinc, Plomb, Tungstène et Sodium

Donner les noms des atomes correspondant aux symboles chimiques suivants :

Hg, K, N, Ar et Mg

2/ Quel est le nombre total de protons, neutrons et d'électrons dans l'entité NO_3^- ?

3/ Le carbone à l'état naturel contient 2 isotopes ^{12}C et ^{13}C dont les masses atomiques sont respectivement 12,0000 g et 13,0034 g.

Sachant que l'on a 98,9% de ^{12}C , quelle est la masse atomique du carbone naturel ?

4/ Quel est le nombre d'électrons de valence des atomes de phosphore $_{15}\text{P}$ et de chlore $_{17}\text{Cl}$? (utiliser la règle de Klechkowski)

Quelle molécule peut-on obtenir à partir de ces 2 atomes ? Expliquer pourquoi.

5/ Représenter les différentes couches électroniques du néon $_{10}\text{Ne}$ en utilisant

- La représentation de Lewis
- La règle de Klechkowski

Quelle est la particularité de cet atome ? Expliquer pourquoi ?

6/ L'atome de sodium a pour numéro atomique 11. Son nombre de masse est 23.

- Quelle est la constitution de son noyau ?
- Donner la structure électronique de cet atome, puis de son ion

7/ Rutherford (physicien anglais – 1871-1937) en interposant une feuille d'or de $0,6\mu\text{m}$ d'épaisseur sur le trajet d'un faisceau de particules α (atomes d'He ionisés He^{2+}), observa qu'environ une seule particule α sur 10000 subissait une déviation. Les autres ne rencontraient pas d'obstacle.

Il en déduit que l'atome est constitué essentiellement de vide.

De l'expérience de Rutherford on en déduit que le rayon d'un atome est de l'ordre de 10^{-10} m et que celui du noyau est de l'ordre de 10^{-15} m.

En admettant qu'une balle de ping-pong de 3cm de diamètre représente le noyau de l'atome, quel serait, en mètres, le diamètre de l'atome ?

8/ Nommer les changements d'état suivants :

Solide \rightarrow Gaz

Gaz \rightarrow Liquide

Gaz \rightarrow Solide

Liquide \rightarrow Solide

9/ Le rayon d'un atome de fer (supposé sphérique) est d'environ $1,3 \text{ \AA}$.

En admettant que les atomes de fer soient placés côte à côte dans le métal, combien y a-t-il d'atomes de fer empilés les uns sur les autres dans une tôle d'épaisseur 1mm ?

10/ Quelle est la composition du noyau de l'atome de Fer ${}_{26}^{56}\text{Fe}$?

- Comment s'appellent les nombres 26 et 56 ?
- Calculer la masse du noyau puis calculer la masse de l'atome. Que peut-on en conclure ?
- Combien y a-t-il d'atomes de fer dans un échantillon de fer de volume 5 cm^3 ?

Données : $m_e = 9,109 \cdot 10^{-31}\text{ kg}$ $m_p = 1,673 \cdot 10^{-27}\text{ kg}$ $m_n = 1,675 \cdot 10^{-27}\text{ kg}$

Masse volumique du fer = $7,8\text{ g/cm}^3$ $M(\text{Fe}) = 55,85\text{ g/mol}$

Workshop sur les notions de mole, masse molaire, volume molaire, nombre d'Avogadro, masse volumique et densité

EXERCICE 1 :

Calculer la quantité de matière en dioxygène contenue dans un flacon de volume 250 ml.

En déduire la masse de dioxygène contenue dans le flacon. Le volume molaire dans les conditions de l'expérience est de $22,7\text{ L/mol}$

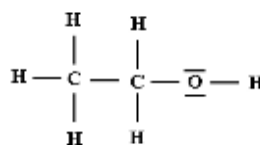
EXERCICE 2 :

Un composé organique formé de carbone, d'hydrogène et d'azote a la composition centésimale, en masse : $\%C = 38,7$; $\%H = 16,1$; $\%N = 45,2$. Sa masse molaire vaut 31 g/mol .

- 1) Calculer les masses de carbone, d'hydrogène et d'azote contenues dans une mole du composé.
- 2) En déduire sa formule brute.

EXERCICE 3 :

L'éthanol a pour formule $\text{C}_2\text{H}_6\text{O}$. Sa formule développée est donnée ci-contre :



- 1) Quelle est sa masse molaire ?
- 2) Combien y a-t-il de moles d'éthanol dans 200 grammes d'éthanol.

- 3) Combien y a-t-il de moles d'éthanol dans un litre d'éthanol sachant que la masse volumique de l'éthanol est 800 kg/m^3 .

EXERCICE 4 :

La molécule d'éthanol a pour formule $\text{C}_2\text{H}_6\text{O}$.

- 1) Calculer sa masse molaire.
- 2) Quels sont les pourcentages en masse du carbone, de l'hydrogène et de l'oxygène dans l'éthanol ?
- 3) Calculer la masse d'une molécule d'éthanol.

EXERCICE 5 :

Dans les conditions ordinaires (17°C et 1.013 bars) le volume molaire des gaz parfaits vaut 23.8 L/mol .

- 1) Calculer la masse molaire et la masse volumique en g/L des gaz suivants : H_2 , CO_2 , O_2 , N_2 et He.
- 2) Sachant que dans les mêmes conditions de températures et de pression, la masse volumique de l'air est de 1.2 g/L , en déduire quels sont les gaz utilisables pour gonfler un dirigeable. Justifier la réponse.

Workshop sur les bases d'une réaction chimique (réactifs, produits, réaction, équilibres, stœchiométrie)

EXERCICE 1 :

- 1) Ecrire l'équation bilan de la combustion (explosive) du dihydrogène dans le di-oxygène.
- 2) On réalise cette réaction. Les réactifs, dans des proportions stœchiométriques et aux conditions normales de température et de pression, occupent un volume total de 15 cm^3 . Quel volume d'eau liquide obtient-on ?

EXERCICE 2:

- 1) Ecrire l'équation-bilan de la formation d'oxyde d'aluminium Al_2O_3 à partir de poudre d'aluminium et de dioxygène. Pour douze moles de dioxygène ayant réagi, combien de moles d'aluminium ont réagi ?
- 2) L'aluminium est supposé en excès. On réalise la réaction dans du dioxygène pur, qui, dans les conditions de l'expérience, occupe un volume total de 288 litres . Quelle masse d'oxyde produit-on ?

EXERCICE 3 :

Equilibrer les équations-bilans suivantes :

- 1) $\text{NH}_3 + \text{O}_2 \rightarrow \text{N}_2 + \text{H}_2\text{O}$
- 2) $\text{NH}_3 + \text{O}_2 \rightarrow \text{NO} + \text{H}_2\text{O}$
- 3) $\text{H}_2\text{SO}_4 + \text{H}_2\text{O} \rightarrow \text{H}_3\text{O}^+ + \text{SO}_4^{2-}$
- 4) $\text{Fe} + \text{H}_3\text{O}^+ \rightarrow \text{Fe}^{2+} + \text{H}_2 + \text{H}_2\text{O}$

EXERCICE 4 :

Une essence d'automobile a une densité égale à 0.7, et on la suppose formée d'octane pur

C_8H_{18} .

- 1) Ecrire l'équation-bilan de la combustion de l'octane.
- 2) Le réservoir automobile contient 40 litres d'essence. De quelle quantité d'octane peut-on disposer ?
Rappel : la densité d'un liquide est numériquement égale à sa masse volumique en kg/L.
- 3) Calculer le volume d'air (mesuré dans les conditions où le volume molaire vaut 24 L/mol) nécessaire à la combustion complète de la totalité de l'essence du réservoir. On considère que l'air contient 1/5 de son volume de dioxygène.
- 4) Quel est le volume en m^3 de dioxyde de carbone formé lors de cette combustion ?
- 5) Calculer la masse de l'eau formée.

EXERCICE 5 :

On mélange 32 grammes d'oxyde de fer III : Fe_2O_3 et 15 grammes de poudre d'aluminium.

Lorsque l'on porte la poudre à une température élevée, on obtient du fer liquide et de l'oxyde d'aluminium Al_2O_3 .

- 1) Ecrire l'équation-bilan de cette réaction.
- 2) Le mélange est-il stœchiométrique ? Si non, calculer la masse du réactif en excès.
- 3) Calculer les masses de fer et d'oxyde d'aluminium obtenues.

EXERCICE 6 :

Le dioxyde de soufre SO_2 réagit avec le sulfure d'hydrogène H_2S pour former du soufre et de l'eau.

$$\Delta E_{N_2} = 0 \rightarrow \text{Covalente}$$

$$\Delta E_{AgCu} = 0 \rightarrow \text{Covalente}$$

$$\Delta E_{TiCl} = 1.62 \rightarrow \text{Polaire}$$

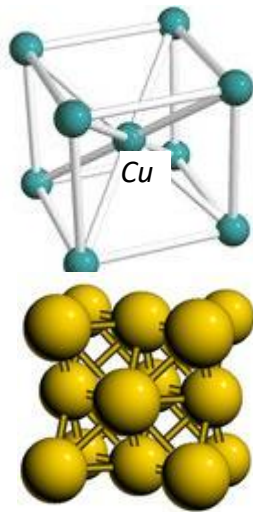
$$\Delta E_{CdZn} = 0 \rightarrow \text{Covalente}$$

$$\Delta E_{CaO} = 2.44 \rightarrow \text{Ionique}$$

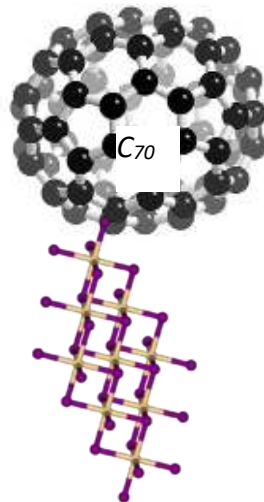
$$\Delta E_{MgF_2} = 0.47 \rightarrow \text{Ionique}$$

$$\Delta E_{SO_2} = 0.86 \rightarrow \text{Polaire}$$

(F1) Déterminer le type de liaisons et le caractère ionique (%) des matériaux suivants :



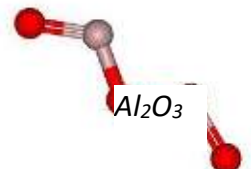
Al



MgBr₂



RuI



SnGe

Corrigé :

$$\% \text{ ionique} = \left(1 - e^{-0,25(\chi_A - \chi_B)^2} \right) \times 100$$

Cu : $\Delta E = 0$ 0% de caractère ionique \rightarrow structure métallique

C₇₀: $\Delta E = 0$ et 0% de caractère ionique \rightarrow structure purement covalente

CF₄: $\Delta E = 1.5$ et 43% de caractère ionique \rightarrow structure polaire covalente

Al₂O₃: $\Delta E = 2$ et 63% de caractère ionique \rightarrow structure ionique

Al: $\Delta E = 0$ et 0 % de caractère ionique → structure métallique

MgBr₂: $\Delta E = 1.6$ et 47% de caractère ionique → structure polaire covalente

RuI: $\Delta E = 1.9$ et 59% de caractère ionique → structure ionique

SnGe : $\Delta E = 0$ et 0% de caractère ionique → structure purement covalente

(F2) Les ions hydrogénoïdes sont des ions formés à partir d'atomes de nombre de charge Z , auxquels on a laissé qu'un seul électron du cortège électronique (ex. He⁺, Li²⁺, Be³⁺ . . .). En 1913, Niels Bohr a montré que ces ions avaient des niveaux d'énergie quantifiés par la relation suivante :

$$E_n = \frac{13.6 Z^2}{n^2}$$

avec n entier strictement positif et E_n exprimée en électronvolts (eV). Le niveau 1 correspond à l'état fondamental. Le niveau énergétique le plus élevé est pris par convention égal à zéro.

Indiquer pour les propositions suivantes **vrai ou faux** (justifier ensuite votre réponse) :

Les ions hydrogénoïdes possèdent chacun Z niveaux d'énergie.

Le niveau fondamental de l'ion béryllium (III) Be³⁺ a pour énergie $E_1 = -218 eV$.

Lors du passage du niveau fondamental au niveau excité immédiatement supérieur, la variation d'énergie de l'ion Be³⁺ est, en valeur absolue $|\Delta E| = 163 eV$.

Ce passage se fait avec émission d'un rayonnement électromagnétique.

Corrigé :

1	2	3	4
F	V	V	F

Justification :

Ils possèdent tous une infinité de niveaux d'énergie, déterminée par la possibilité pour n de prendre toutes les valeurs entières de un à l'infini.

Le béryllium a pour numéro atomique $Z = 4$, donc son niveau fondamental possède une énergie $E_1 = -13,6 \times 4^2 = -13,6 \times 16 \approx -218 \text{ eV}$.

En effet, $E_2 - E_1 = -\frac{218}{2^2} - \frac{218}{1^2} = 218 \times \frac{3}{4} \approx 163 \text{ eV}$.

Non, il se fait avec absorption d'un rayonnement électromagnétique puisque l'on passe du niveau fondamental au premier niveau excité de l'ion hydrogénoïde Be^{3+}

(F2) A partir du nombre d'électrons externes, déduire la réactivité de l'atome d'oxygène.

Donner un exemple de composé à caractère ionique

Donner un exemple de composé à caractère covalent et dessiner les structures de Lewis.

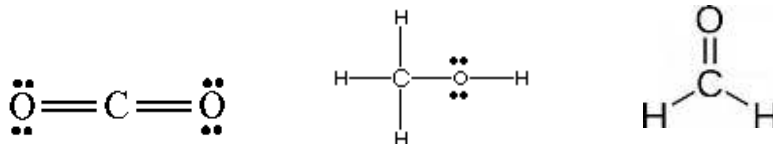
Corrigé :

Oxygène : $1s^2 2s^2 2p^4$ soit 6 électrons externes sur la couche de valence : il manque deux électrons pour compléter la couche à huit électrons (règle de l'octet). C'est un élément électro-négatif car il aura tendance à attraper des électrons des atomes voisins avec une grande facilité.

L'oxygène a tendance à gagner ces deux électrons lors des réactions chimiques, soit :

formant un ion O^{2-} pour former un composé ionique, tel que NaO_2 , Rb_2O_2 , K_2O

mettant en œuvre deux liaisons de covalence pour partager des électrons en commun et former des composés de caractère covalents tels que : CO_2 , CH_3OH (méthanol), CH_2O (méthanal ou formol)



(F2) A partir de couples cation/anion données ci-après, former des composés ioniques. Faire un schéma indiquant les liaisons et indiquer leur formule chimique.

Na^+ et S^{2-}

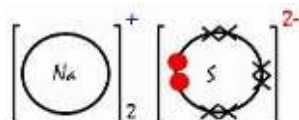
Mg^{2+} et Cl^-

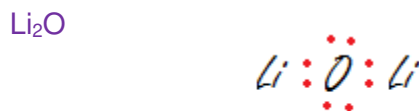
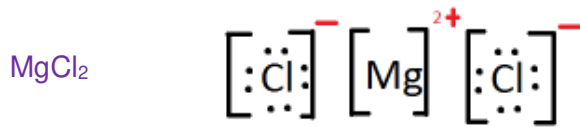
Al^{3+} et O^{2-}

Li^+ et O^-

Corrigé :

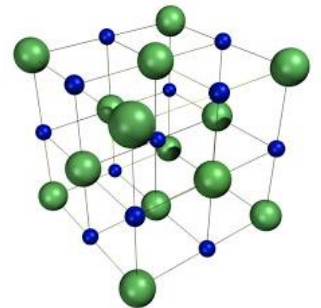
Na_2S





(F3) Énergie du cristal de sel : l'énergie potentielle résultante entre deux ions adjacents (Na⁺ et Cl⁻) peut être représentée par la somme de deux équations (énergie d'attraction + énergie de répulsion), soit :

$$E_N = -\frac{A}{r} + \frac{B}{r^n}$$



Calculer l'énergie de liaison E_0 , la distance d'équilibre r_0 et la force d'interaction $F(r)$ en fonction des paramètres A, B et n en appliquant la procédure suivante :

Différencier E_N par rapport à r (distance de séparation entre les deux atomes). Ceci vous donnera l'expression de la force interatomique en fonction de r .

Ramener l'expression résultante à 0 puisque la courbe E_N atteint son minimum à E_0 . Résoudre l'équation pour r en fonction de A, B et n pour obtenir r_0 , l'espacement interatomique d'équilibre.

Calculer la valeur numérique de r_0, E_0 et F_0 pour un cristal de sel (NaCl) sachant que $n = 8$, $A = 1.436 \text{ eV} \cdot \text{nm}$ et $B = 7.32 \cdot 10^{-6} \text{ eV} \cdot \text{nm}^8$

Corrigé :

Il existe une relation entre la force et l'énergie potentielle, à savoir :

$$\frac{dE_N}{dr} = \text{Force}$$

Ainsi différentier E_N par rapport à r nous donne l'expression de la force de liaison :

$$F(r) = \frac{dE_N}{dr} = \frac{A}{r^2} - nB \frac{1}{r^{(n+1)}}$$

Comme la courbe E_N atteint son minimum à E_0 nous allons chercher ce minimum (où la dérivée s'annule)

$$\frac{dE_N}{dx} = 0 \Leftrightarrow \frac{A}{r^2} - nB \frac{1}{r^{(n+1)}} = 0$$

On résout cette équation pour r , c'est-à-dire, que la distance qu'annule la dérivée correspond à l'espacement inter-ionique d'équilibre r_0 :

$$\begin{aligned} \frac{A}{r^2} &= nB \frac{1}{r^{(n+1)}} \\ \frac{r^{(n+1)}}{r^2} &= \frac{nB}{A} \Rightarrow r^{(n-1)} = \frac{nB}{A} \\ r_0 &= \left(\frac{nB}{A} \right)^{\frac{1}{(n-1)}} \end{aligned}$$

Les applications numériques :

$$r_0 = \left(\frac{nB}{A} \right)^{\frac{1}{(n-1)}} = \left(\frac{8 \times 7.32 \cdot 10^{-6}}{1.436} \right)^{\frac{1}{7}} = \boxed{r_0 = 0.23 \text{ nm} = 2.3 \text{ \AA}}$$

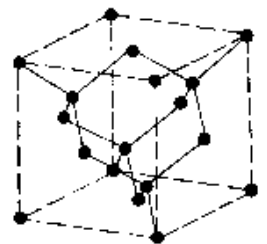
$$E_0 = -\frac{A}{r_0} + \frac{B}{r_0^8} = -\frac{1.436}{0.23} + \frac{7.32 \cdot 10^{-6}}{(0.23)^8} = -5.30 \text{ eV}$$

$$F_0 = 0 \rightarrow \text{car } r_0 \Leftrightarrow F(r) = \frac{dE_N}{dr} = 0$$

(F3) Energie du néon solide : Pour des températures plus basses que 24.5 K, le Néon cristallise. L'énergie de liaison interatomique est celle d'un solide moléculaire avec des interactions de Van der Waals, donné par :

$$E(r) = -2\epsilon \left[14.45 \left(\frac{\sigma}{r} \right)^6 - 12.13 \left(\frac{\sigma}{r} \right)^{12} \right] \text{ (eV/atome)}$$

Où $\epsilon = 3.121 \times 10^{-3} \text{ eV}$ et $\sigma = 0.274 \text{ nm}$, constantes



Calculer la distance de séparation d'équilibre entre deux atomes de Néon.

Calculer l'énergie de liaison pour le cristal de Néon

Donner l'expression de la force électrostatique en fonction de la distance entre les atomes des Néon

Corrigé:

A partir de l'expression de l'énergie, nous allons dériver par rapport r , et où cette fonction prend son minimum, nous allons résoudre l'équation pour r_0 :

$$\frac{d(E(r))}{dr} = 2 \cdot 6 \epsilon \sigma^6 14.45 r^{-7} - 2 \cdot 12 \cdot 12.13 \epsilon \sigma^{12} r^{-13}$$

$$0 = 12 \epsilon \sigma^6 r^{-7} (14.45 - 2 \cdot 12.13 \sigma^6 r^{-6})$$

$$14.45 = 2 \cdot 12.13 \sigma^6 r^{-6}$$

$$r^6 = \frac{2 \cdot 12.13 \sigma^6}{14.45}$$

$$r_0 = \left(\frac{2 \cdot 12.13 \sigma^6}{14.45} \right)^{\frac{1}{6}} = \boxed{1.09 \sigma}$$

$$r_0 = 1.09 (0.274 \text{ nm}) = \boxed{0.30 \text{ nm} = 3 \text{ \AA}}$$

Ainsi, nous devons remplacer r_0 dans l'expression de l'énergie pour retrouver E_0 :

$$E(r_0) = E_0 = -2\epsilon \left[14.45 \left(\frac{\sigma}{1.09 \sigma} \right)^6 - 12.13 \left(\frac{\sigma}{1.09 \sigma} \right)^{12} \right]$$

$$E_0 = -2\epsilon \left[14.45 \left(\frac{1}{1.09} \right)^6 - 12.13 \left(\frac{1}{1.09} \right)^{12} \right] = 2\epsilon [14.45 \cdot 0.6 - 12.13 \cdot 0.35]$$

$$E_0 = -2 \times 3.121 \cdot 10^{-3} \text{ eV} [8.67 - 4.31] = \boxed{-0.027 \text{ eV}}$$

Ce qui signifie que pour faire un cristal de néon il faut enlever à chaque atome de néon 0.027 eV d'énergie, et ceci s'obtient avec une diminution considérable de l'énergie.

Pour l'expression de la force électrostatique entre chaque paire d'atome de néon, nous allons utiliser la dérivée de l'énergie déjà calculée, on a :

$$F(r) = 12 \epsilon \sigma^6 r^{-7} (14.45 - 2 \cdot 12.13 \sigma^6 r^{-6})$$

Workshop Réactions acide-base

Exercice 1 - Répondre aux questions ci-dessous :

a – Si une solution a une concentration en H_3O^+ égale à 10^{-8} mol/L. Quel est son pH ?

b - Si une solution a une concentration en $[\text{H}_3\text{O}^+] = 10^{-5}$ mol/L; déterminer son pH.

c - La mesure du pH du coca-cola donne 2,7, calculer la concentration en ions H_3O^+ .

d - Quels sont le pH et le caractère d'une solution (acide ou basique) si $[\text{OH}^-] = 0,00002$ mol. $^{-1}$?

Corrigé :

$$\text{pH} = -\log [\text{H}_3\text{O}^+] = -\log (10^{-8}) = 8$$

$$\text{pH} = -\log [\text{H}_3\text{O}^+] = -\log (10^{-5}) = 5$$

$$[\text{H}_3\text{O}^+] = 10^{-\text{pH}} = 10^{-2,7} = 0,002 \text{ mol/l}$$

$$[\text{H}_3\text{O}^+].[\text{OH}^-] = 10^{-14} \quad \text{et} \quad [\text{OH}^-] = 2 \cdot 10^{-5} \text{ mol/l}$$

$$[\text{H}_3\text{O}^+] = 10^{-14} / [\text{OH}^-] = 10^{-14} / 2 \cdot 10^{-5} = 5 \cdot 10^{-10} \text{ mol/l}$$

$$\text{pH} = -\log [\text{H}_3\text{O}^+] = 9,3$$

Conclusion : la solution est basique

Exercice 2

La potasse ou l'hydroxyde de potassium KOH(s) est une base forte. Elle est utilisée entre autre dans la fabrication des savons.

On en dissout 1,0g dans l'eau afin d'obtenir exactement (aux erreurs de mesure près) un volume $V=750$ ml de solution.

a – Ecrire l'équation de la réaction de l'hydroxyde de potassium KOH(s) avec l'eau

b – Calculer la concentration molaire volumique en soluté apporté de la solution obtenue

c – Calculer son pH

Donnée : $M \text{ KOH} = 56 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$

Corrigé :

a - Equation de l'hydroxyde de sodium KOH(s) avec l'eau :



b - Concentration molaire volumique en soluté apporté de la solution obtenue

$$C_{\text{KOH, apporté}} = \frac{n_{\text{KOH, apporté}}}{V_{\text{solution}}} = \frac{\frac{m_{\text{KOH apporté}}}{M_{\text{KOH}}}}{V_{\text{solution}}} = \frac{1/56}{0,75} = 2,4 \cdot 10^{-2} \text{ mol/l}$$

c – Calcul du pH de la solution :

L'hydroxyde de potassium est une base forte : son pH est obtenu par la relation $\text{pH} = 14 + \log (C_{\text{KOH apporté}}) = 14 + \log (2,4 \cdot 10^{-2}) = 12,4$

Exercice 3

Soit une solution d'acide chlorhydrique HCl de concentration initiale C égale à 10^{-3} mol/l.

A l'équilibre, le pH de la solution est de 3.

a - Ecrire la réaction d'ionisation de HCl.

b - Est-ce que à l'équilibre, la réaction est totale. Expliquer.

c - Est-ce que l'acide HCl est fort ou faible ? Expliquer.

d - On dilue la solution d'acide chlorhydrique HCl par 10. Déterminer le pH de la solution à l'équilibre.

Corrigé :

a – La réaction d'ionisation de HCl est :



b – A l'équilibre, $\text{pH} = 3$. $[\text{H}_3\text{O}^+] = 10^{-\text{pH}} = 10^{-3}$ mol/l

D'après la relation de conservation de la matière : $[\text{HCl}]_{\text{initiale}} = [\text{H}_3\text{O}^+]_{\text{équilibre}} = [\text{Cl}^-]_{\text{équilibre}}$ si la réaction est totale.

Cette équation est vérifiée ici : $[\text{HCl}]_{\text{initiale}} = [\text{H}_3\text{O}^+]_{\text{équilibre}} = 10^{-3}$ mol/l. Par conséquent, la réaction (1) est totale.

c – Comme la réaction (1) est totale, l'acide HCl est fort.

d – Si on dilue la solution chlorhydrique par 10, les concentrations $[\text{H}_3\text{O}^+]_{\text{équilibre}}$ et $[\text{Cl}^-]_{\text{équilibre}}$ sont divisées par 10 (même nombre de moles présent dans un volume 10 fois plus grand).

Donc : $[\text{H}_3\text{O}^+]_{\text{équilibre}} = 10^{-3} / 10$ mol/l

$$[\text{H}_3\text{O}^+]_{\text{équilibre}} = 10^{-4} \text{ mol/l}$$

$$\text{pH} = -\log[\text{H}_3\text{O}^+] = 4$$

Exercice 4

Soit une solution de CH₃COOH de concentration initiale C égale à 10⁻² mol/l.

A l'équilibre, le pH de la solution est de 3,35.

- a - Ecrire la réaction d'ionisation de CH₃COOH.
- b - Est-ce que à l'équilibre, la réaction est totale. Expliquer.
- c - Est-ce que l'acide CH₃COOH est fort ou faible ? Expliquer.
- d – Déterminer le pourcentage de molécules CH₃COOH ionisées.

Corrigé :

a - La réaction d'ionisation de CH₃COOH est :



b – A l'équilibre, pH = 3,35. $[\text{H}_3\text{O}^+] = 10^{-\text{pH}} = 10^{-3,35} \text{ mol/l} = 4,4 \cdot 10^{-4} \text{ mol/l}$

D'après la relation de conservation de la matière : $[\text{CH}_3\text{COOH}]_{\text{initiale}} = [\text{H}_3\text{O}^+]_{\text{équilibre}} = [\text{CH}_3\text{COO}^-]_{\text{équilibre}}$ si la réaction est totale.

Cette équation n'est pas vérifiée ici : $[\text{CH}_3\text{COOH}]_{\text{initiale}} = 10^{-2} \text{ mol/l}$; $[\text{H}_3\text{O}^+]_{\text{équilibre}} = 4,4 \cdot 10^{-4} \text{ mol/l}$. Par conséquent, la réaction (1) n'est pas totale (elle est limitée).

(ou La réaction d'ionisation (2) n'est pas totale sinon CH₃COOH serait un acide fort et on aurait :

$$\text{pH} = -\log [\text{CH}_3\text{COOH}]_{\text{initiale}}).$$

c – Comme la réaction (2) n'est pas totale, l'acide CH₃COOH est faible.

d - D'après la relation de conservation de la matière : $[\text{CH}_3\text{COOH}]_{\text{initiale}} = [\text{CH}_3\text{COO}^-]_{\text{équilibre}} + [\text{CH}_3\text{COOH}]_{\text{équilibre}}$.

Par ailleurs, la solution est électriquement neutre à tout instant (respect de la loi d'électroneutralité de la solution) donc à l'équilibre : $[\text{CH}_3\text{COO}^-]_{\text{équilibre}} = [\text{H}_3\text{O}^+]_{\text{équilibre}} = 4,45 \cdot 10^{-4} \text{ mol/l}$.

$$\text{Par conséquent, } [\text{CH}_3\text{COOH}]_{\text{équilibre}} = [\text{CH}_3\text{COOH}]_{\text{initiale}} - [\text{CH}_3\text{COO}^-]_{\text{équilibre}} = 10^{-2} - 4,4 \cdot 10^{-4}$$

$$= 9,55 \cdot 10^{-3} \text{ mol/l}.$$

Le pourcentage de molécules CH₃COOH ionisées = $100 \cdot ([\text{CH}_3\text{COO}^-]_{\text{équilibre}} / [\text{CH}_3\text{COOH}]_{\text{initiale}})$

$$= 4,45 \cdot 10^{-4} / 10^{-2} = 4,4 \%$$

Exercice 5 : Détermination du Ka d'une solution de NH₃.

Soit la quantité initiale de NH₃ = 0,1 mol par litre de solution. Le pH de la solution à l'équilibre = 11,1.

a - Ecrire la réaction de NH₃ dans l'eau

b - Déterminer Ka et pKa du couple acido-basique, dont le couple NH₄⁺/NH₃

c- Quelle est l'espèce prédominante du couple NH₄⁺/NH₃ dans cette solution à l'équilibre.

Corrigé :

a – La réaction de NH₃ dans l'eau est :



b – Détermination du Ka :

$$K_a = [\text{base}] \cdot [\text{H}_3\text{O}^+] / [\text{acide}] = [\text{NH}_3] \cdot [\text{H}_3\text{O}^+] / [\text{NH}_4^+] \text{ à l'équilibre.}$$

$$[\text{H}_3\text{O}^+] = 10^{-\text{pH}} = 10^{-11,1} \text{ mol/l}$$

$$[\text{H}_3\text{O}^+] \cdot [\text{OH}^-] = 10^{-14}. \text{ Donc } [\text{OH}^-] = 10^{-14} / 10^{-11,1} = 10^{-2,9} = 1,26 \cdot 10^{-3} \text{ mol/l}$$

D'après la loi d'électroneutralité (= la solution est électriquement neutre à tout instant, donc également à l'équilibre) : $[\text{NH}_4^+] = [\text{OH}^-] = 1,26 \cdot 10^{-3} \text{ mol/l}$

Par ailleurs, d'après la relation de conservation de la matière : $[\text{NH}_3]_{\text{initiale}} = [\text{NH}_4^+]_{\text{équilibre}} + [\text{NH}_3]_{\text{équilibre}}$.

$$\text{Donc } [\text{NH}_3]_{\text{équilibre}} = : [\text{NH}_3]_{\text{initiale}} - [\text{NH}_4^+]_{\text{équilibre}} = 0,1 - 1,26 \cdot 10^{-3} \simeq 0,1 \text{ mol/l}$$

$$K_a = [\text{NH}_3] \cdot [\text{H}_3\text{O}^+] / [\text{NH}_4^+] = 0,1 \cdot 10^{-11,1} / 10^{-2,9} = 10^{-11,1+2,9} = 10^{-9,2}$$

$$\text{pKa} = -\log K_a = -\log (10^{-9,2}) = 9,2$$

c – Détermination de l'espèce prédominante du couple NH₄⁺/NH₃ dans cette solution à l'équilibre.

$$[\text{NH}_3]_{\text{équilibre}} \simeq 0,1 \text{ mol/l}$$

$$[\text{NH}_4^+]_{\text{équilibre}} = 1,26 \cdot 10^{-3} \text{ mol/l}$$

L'espèce prédominante du couple NH₄⁺/NH₃ dans cette solution à l'équilibre est NH₃

Workshop Réactions d'oxydoréduction (REDOX)

(F1) Calculer le nombre d'oxydation de :

- a) du fer dans **Fe**
- b) du phosphore dans **P₄**
- c) de carbone dans **CH₄**
- d) du carbone dans **CO₂**
- e) du chlore dans **HClO₄**
- f) du carbone dans **CO₃²⁻**
- g) du magnésium dans **MgO**
- h) du soufre dans **Na₂SO₄**

Corrigé :

Fe est sous forme de corps simple : $No = 0$

P₄ est sous forme de corps simple : $No = 0$

On sait que $No = +1$ pour *H*. La somme des $No = 0$ pour la molécule. 4 *H* à +1 donne +4, à compenser par -4.

Conclusion : le carbone a un $No = -IV$.

On sait que $No = -2$ pour *O*. La somme des $No = 0$ pour la molécule. 2 *O* à -2 donne -4, donc à compenser par +4.

Conclusion : le carbone a un $No = +IV$.

On sait que $No = +I$ pour *H* et que $No = -II$ pour *O*. La somme des $No = 0$ pour la molécule. 4 fois -II et 1 fois +I donne -7, à compenser par +7.

Conclusion : le chlore a un $No = +VII$.

On sait que $No = -2$ pour *O*. La somme des No correspondant à la charge du ion, c'est-à-dire -2.

3*O* à -2 donne -6, donc à compenser par +4 pour avoir une somme de -2.

Conclusion : le carbone a un $No = +IV$.

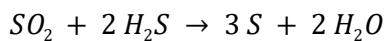
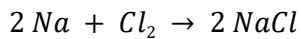
On sait que $No = -2$ pour O

Conclusion : le magnésium a un $NO = +2$.

Na_2SO_4 est un corps ionique composé de deux ions Na^+ et d'un ion SO_4^{2-} . La somme des No doit faire -2 . On sait que $No = -2$ pour O. 4 O à -2 donne -8 , donc à compenser par $+6$ pour avoir une somme de -2 .

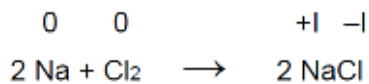
Conclusion : le soufre a un $No = +VI$.

(F1) Déterminez l'oxydant et le réducteur dans les oxydoréductions suivantes :



Corrigé :

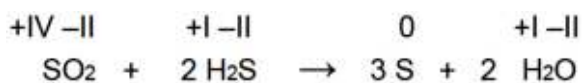
On attribue les nombres d'oxydations pour chaque élément à gauche et à droite de l'équation :



Na passe de 0 à +1, donc donne 1 électron : Na est le réducteur

Cl passe de 0 à -1 , donc accepte 1 électron : Cl_2 est l'oxydant.

On attribue les nombres d'oxydations pour chaque élément à gauche et à droite de l'équation :



S dans le SO_2 passe de +IV à 0, donc accepte 4 électrons : SO_2 est l'oxydant.

S dans H_2S passe de -2 à 0, donc donne 2 électrons : H_2S est le réducteur.

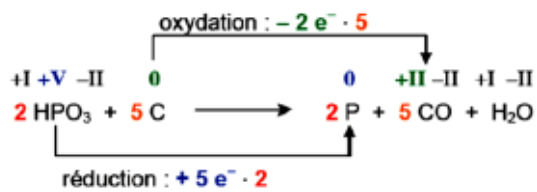
(F2) Equilibrez les équations suivantes à l'aide des nombres d'oxydation et indiquez : l'oxydation, la réduction, l'oxydant et le réducteur :



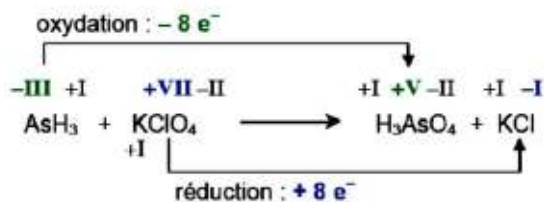
Données : voici un tableau avec des couples REDOX le plus fréquentes.

Couple rédox	Potentiel standard en V
MnO ₄ ⁻ /Mn ²⁺	1,507
Cl ₂ / Cl ⁻	1,34
Br ₂ /Br ⁻	1,087
NO ₃ ⁻ / NO	0,96
Ag / Ag ⁺	0,799
Fe ³⁺ / Fe ²⁺	0,771
I ₂ /I ⁻	0,536
Cu ²⁺ /Cu	0,342
H ⁺ /H ₂	-0,00
Ni ²⁺ / Ni	- 0,257
Zn ²⁺ /Zn	-0,76
H ₂ O/H ₂	-0,828
Na ⁺ /Na	-2,71

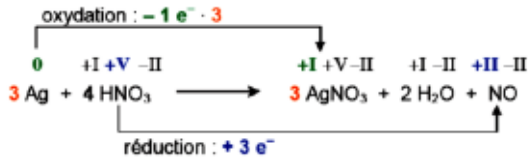
Corrigé :



HPO₃ est l'oxydant.
C est le réducteur

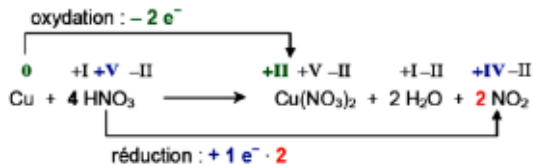


KClO₄ est l'oxydant.
AsH₃ est le réducteur.



HNO_3 est l'oxydant.
 Ag est le réducteur.

Sur les 4 HNO_3 , un seul est réduit. Les 3 autres HNO_3 libèrent leur nitrate sans échange d'électron pour former les 3 AgNO_3 .



HNO_3 est l'oxydant.
 Cu est le réducteur.

Sur les 4 HNO_3 , 2 sont réduits. Les 2 autres HNO_3 libèrent leur nitrate sans échange d'électron pour former le $\text{Cu}(\text{NO}_3)_2$.

(F2) A l'aide des valeurs des E0 de couples redox, indiquez l'équation de chacune des réactions suivantes :

On jette un morceau de sodium dans l'eau.

On jette un morceau de zinc dans une solution aqueuse de HCl .

On jette un morceau de zinc dans une solution aqueuse de AgNO_3 .

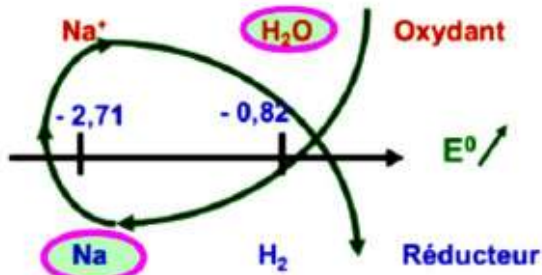
On mélange de l'eau de brome (Br_2) avec une solution aqueuse de NaI .

Données : voici un tableau de Potentiels standards.

Couple redox	Potentiel standard en V
$\text{MnO}_4^- / \text{Mn}^{2+}$	1,507
$\text{Cl}_2 / \text{Cl}^-$	1,34
$\text{Br}_2 / \text{Br}^-$	1,087
$\text{NO}_3^- / \text{NO}$	0,96
Ag / Ag^+	0,799
$\text{Fe}^{3+} / \text{Fe}^{2+}$	0,771
I_2 / I^-	0,536
$\text{Cu}^{2+} / \text{Cu}$	0,342
H^+ / H_2	-0,00
$\text{Ni}^{2+} / \text{Ni}$	-0,257
$\text{Zn}^{2+} / \text{Zn}$	-0,76
$\text{H}_2\text{O} / \text{H}_2$	-0,828
Na^+ / Na	-2,71

Corrigé :

Le couple Na^+ / Na est au-dessus du couple $\text{H}_2\text{O} / \text{H}_2$ dans le tableau. Donc, c'est H_2O qui peut oxyder Na .



Le réducteur est Na , qui s'oxyde en Na^+ .

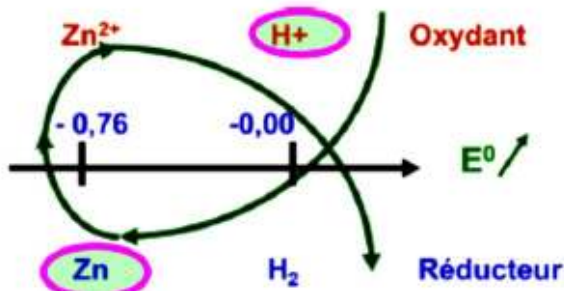
L'oxydant est H_2O qui va se réduire en H_2 et OH^- .

L'équation de l'oxydation est : $\text{Na} \rightarrow \text{Na}^+ + \text{e}^-$

L'équation de la réduction est : $2 \text{H}_2\text{O} + 2 \text{e}^- \rightarrow \text{H}_2 + 2 \text{OH}^-$

Après combinaison : $2 \text{Na} + 2 \text{H}_2\text{O} \rightarrow 2 \text{Na}^+ + \text{H}_2 + 2 \text{OH}^-$

Le couple $\text{Zn}^{2+} / \text{Zn}$ est au-dessus du couple H^+ / H_2 dans le tableau. Donc, c'est H^+ de l'acide qui peut oxyder Zn .



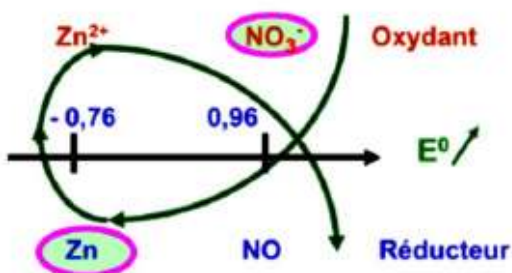
Le réducteur est Zn , qui s'oxyde en Zn^{2+} .

L'oxydant est H^+ qui va se réduire en H_2 .

L'équation de l'oxydation est : $\text{Zn} \rightarrow \text{Zn}^{2+} + 2 \text{e}^-$

L'équation de la réduction est : $2 \text{H}^+ + 2 \text{e}^- \rightarrow \text{H}_2$

Le couple $\text{Zn}^{2+} / \text{Zn}$ est au-dessus du couple Ag^+ / Ag dans le tableau. Donc, c'est Ag^+ qui peut oxyder Zn . Mais le couple $\text{NO}_3^- / \text{NO}$ est encore plus en dessous. Donc, selon l'écart des potentiels rédox, c'est ce dernier qui va réagir avec le zinc.



Le réducteur est Zn , qui s'oxyde en Zn^{2+} .

L'oxydant est NO_3^- qui va se réduire en NO .

L'équation de l'oxydation est : $\text{Zn} \rightarrow \text{Zn}^{2+} + 2 \text{e}^-$

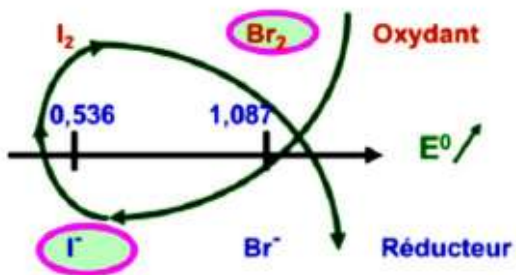
L'équation de la réduction est : $\text{NO}_3^- + 4 \text{H}^+ + 3 \text{e}^- \rightarrow \text{NO} + 2 \text{H}_2\text{O}$

Après combinaison : $3 \text{Zn} + 2 \text{NO}_3^- + 8 \text{H}^+ \rightarrow 3 \text{Zn}^{2+} + 2 \text{NO} + 4 \text{H}_2\text{O}$

remarque : L'argent peut se réduire pendant le processus, puisque le couple Ag^+ / Ag est au-dessous dans le tableau des couples rédox, donc deux réactions auront lieu au début, à

savoir la réduction de l'argent et la réduction de NO_3^- . Mais Ag sera oxydé par les nitrates encore en solution, donc l'argent métallique ne sera pas observable au final.

Le couple I_2/I^- est au-dessus du couple Br_2/Br^- dans le tableau. Donc, c'est Br_2 qui peut oxyder I^-



Le réducteur est I^- , qui s'oxyde en I_2 .

L'oxydant est Br_2 qui va se réduire en Br^- .

L'équation de l'oxydation est : $2 \text{I}^- \rightarrow \text{I}_2 + 2 \text{e}^-$

L'équation de la réduction est : $\text{Br}_2 + 2 \text{e}^- \rightarrow 2 \text{Br}^-$

Après combinaison : $2 \text{I}^- + \text{Br}_2 \rightarrow \text{I}_2 + 2 \text{Br}^-$

Partie 2 : La mécanique des fluides et la thermique

Les grands objectifs visés

- Établir l'équation locale de la statique des fluides à partir d'un bilan de forces.
- Déterminer un champ de pression à partir de l'équation locale.
- Connaître et savoir appliquer la poussée d'Archimède.
- Connaître les propriétés élastique et plastique des métaux.
- Savoir calculer une déformation.
- Connaître les phénomènes de rayonnement.
- Déterminer le flux de chaleur rayonné.
- Connaître les phénomènes de conduction thermique.
- Savoir utiliser l'équation de Fourier pour calculer le flux de chaleur par conduction.
- Connaître les phénomènes de convection.
- Savoir utiliser l'équation de Fourier pour calculer le flux de chaleur par convection.

Pression hydrostatique

Pression engendrée par un fluide au repos

RDM

Résistance des matériaux

Transferts thermiques

Échanges de chaleur

Rayonnement

Échanges de chaleur par ondes électromagnétique

Conduction thermique

Échanges de chaleur au sein d'un solide

Convection

Échanges de chaleur par un flux de fluide

Workshop Statique des fluides

1- (F1) Champ de pression dans un liquide incompressible et homogène

Intégrer la relation fondamentale de la statique entre z_1 et z_2 .

Corrigé

$$\frac{dP}{dz} = -\rho \cdot g$$

$$dP = -\rho \cdot g \cdot dz$$

$$\int_{P(z_1)}^{P(z_2)} P = -\rho \cdot g \cdot \int_{z_1}^{z_2} dz$$

$$P(z_2) - P(z_1) = -\rho \cdot g \cdot (z_2 - z_1)$$

$$P(z_2) - P(z_1) = \rho \cdot g \cdot (z_1 - z_2)$$

2- (F1) Pression au fond de l'eau

Calculer la pression à 11 000 mètres sous l'océan, l'eau étant supposée incompressible.

Données : $\rho_{eau} = 1 \text{ g.mL}^{-1}$; $g = 9,81 \text{ m.s}^{-2}$.

Corrigé

Considérons le point 1 à la surface de l'eau et le point 2 à une profondeur de 11 000 m.

D'après la loi de l'hydrostatique, on sait que :

$$P_2 - P_1 = \rho \cdot g \cdot (z_1 - z_2)$$

Avec P : la pression en Pa,

ρ : la masse volumique en kg.m^{-3} ,

g : l'accélération de la gravité en m.s^{-2} ,

z : l'altitude en m.

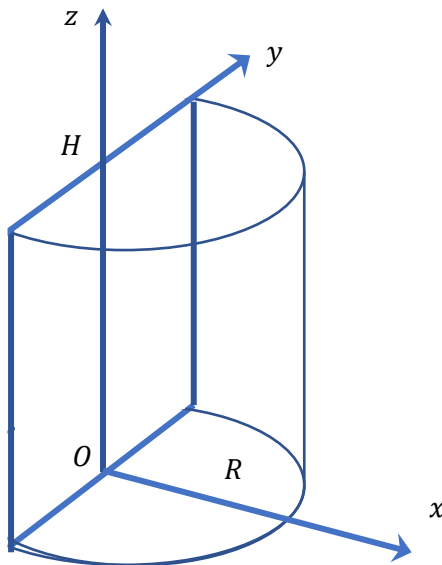
D'où :

$$\begin{aligned} P_2 &= P_{atm} + \rho \cdot g \cdot (z_1 - z_2) \\ P_2 &= 1,013 \cdot 10^5 + 1000 \times 9,81 \times (0 - (-11000)) \\ P_2 &= 1,080 \cdot 10^8 \text{ Pa} = 1080 \text{ bar} \end{aligned}$$

3- (F2) Calculer la résultante des forces de pression exercées par un fluide

Déterminer le champ de pression.

Exprimer la résultante des forces de pression exercées par un fluide sur la face bombée d'un demi cylindre de rayon R rempli d'eau de masse volumique ρ sur une hauteur H .



Indications

On posera $P(z = H) = P_0$

On utilisera les coordonnées cylindriques pour calculer la force de pression élémentaire.

Corrigé

Il y a 2 façons de résoudre l'équation différentielle locale de la statique des fluides :

$$\frac{dP}{dz} = -\rho g$$

1/ On sépare les variables et on intègre de z à H l'équation locale de la statique des fluides, il vient :

$$\int_P^{P_0} dP = - \int_z^H \rho g dz$$

Soit

$$P_0 - P(z) = -\rho g(H - z)$$

Donc

$$P(z) = P_0 + \rho g(H - z)$$

2/ si $\frac{dP}{dz} = -\rho g$ alors $P(z) = -\rho g z + C$

À l'aide de la condition aux limites $P(z = H) = P_0$, on en déduit $P_0 = -\rho g H + C$, d'où $C = P_0 + \rho g H$ et $P(z) = P_0 + (H - z)\rho g$.

Force de pression $F = f(P)$.

$$\vec{F} = \iint_S d\vec{F}$$

À l'intérieur du réservoir, nous avons : $d\vec{F}_{eau} = P(z) \cdot dS\vec{n}$

Et à l'extérieur : $d\vec{F}_{air} = -P_0 \cdot dS\vec{n}$

Donc $d\vec{F} = d\vec{F}_{eau} + d\vec{F}_{air}$

$$d\vec{F} = (P(z) - P_0) \cdot dS\vec{n}$$

Or nous avons déterminé que $P(z) = P_0 + \rho g(H - z)$

Donc $d\vec{F} = (\rho g(H - z) - P_0 + P_0) \cdot dS\vec{n}$

$$d\vec{F} = \rho g(H - z) \cdot dS\vec{n}$$

Le réservoir étant hémicylindrique, il est plus facile de résoudre le problème en passant des coordonnées cartésiennes (x, y, z) aux coordonnées cylindriques (R, θ, z) .

Dans ce repère, $dS\vec{n} = R \cdot d\theta \cdot dz \cdot \vec{u}_r$

(force selon \vec{u}_r)

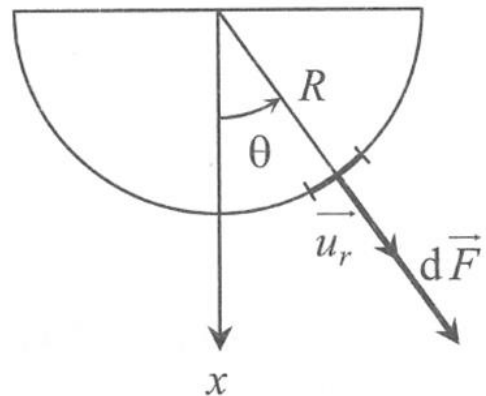
$$D'où $d\vec{F} = \rho g(H - z) \cdot R \cdot d\theta \cdot dz \cdot \vec{u}_r$$$

Par symétrie, la résultante des forces pressantes exercées sur la face bombée est portée par (Ox) : $\vec{F} = F_x \vec{u}_x$.

Alors

$$F_x = \iint dF \frac{\vec{u}_r \cdot \vec{u}_x}{\cos \theta} = \rho \cdot g \cdot R \int_{\theta=-\pi/2}^{\theta=\pi/2} \cos \theta \cdot d\theta \int_{z=0}^{z=H} (H - z) \cdot dz$$

Soit



$$\vec{F} = \rho \cdot g \cdot R \cdot H^2 \cdot \vec{u}_x$$

Workshop RDM

4- (F1) Traction d'une barre d'acier

Une barre d'acier de 10 mm de diamètre reçoit une force de traction de 12 560 N.

- 1) Quel sera l'allongement d'une barre de 5 m si $E = 210 \text{ GPa}$?
- 2) Quelle sera la contrainte dans cette barre ?

Corrigé

1) Calcul de la section de la barre :

$$S = \frac{\pi d^2}{4} = \frac{\pi 10^2}{4} = 78,54 \text{ mm}^2$$

L'allongement de la barre :

$$\Delta l = \frac{F \times l_0}{E \times S_0} = \frac{12\,560 \times 5\,000}{210\,000 \times 78,54} = 3,8 \text{ mm}$$

2) La contrainte sera égale à :

$$\sigma = \frac{F}{S} = \frac{12\,560}{78,54} = 159,9 \text{ N} \cdot \text{mm}^{-2} = 159,9 \text{ MPa}$$

5- (F1) Tension axiale

Un barreau rectiligne de section uniforme est soumis à une tension axiale. Sa section a une surface de 6 mm^2 et le barreau a une longueur de 4 m. Si l'allongement total est de 0,40 cm sous une charge de 1260 N, trouver le module d'Young du matériau.

Corrigé

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon} = \frac{\frac{F}{S_0}}{\frac{\Delta l}{l_0}} = \frac{\frac{1260}{6}}{\frac{4}{4000}}$$

$$E = 210\,000 \text{ N} \cdot \text{mm}^{-2} = 210 \text{ GPa}$$

6- (F2) Essai de traction

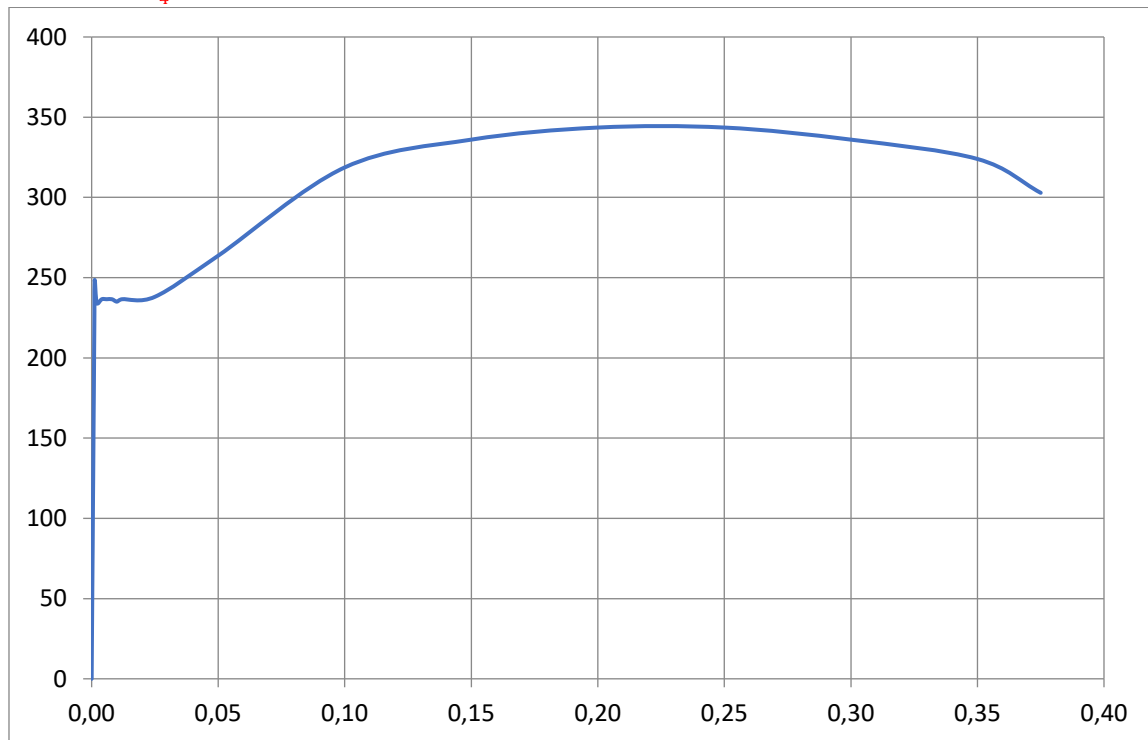
Lors d'un essai de traction d'une éprouvette cylindrique en acier de 13 mm de diamètre, les résultats ci-dessous ont été obtenus. Après rupture, la longueur de référence de 50 mm est devenue 68,690 mm. À partir des résultats fournis, déterminer la limite élastique, le module d'Young, le pourcentage d'allongement après rupture et la charge de rupture.

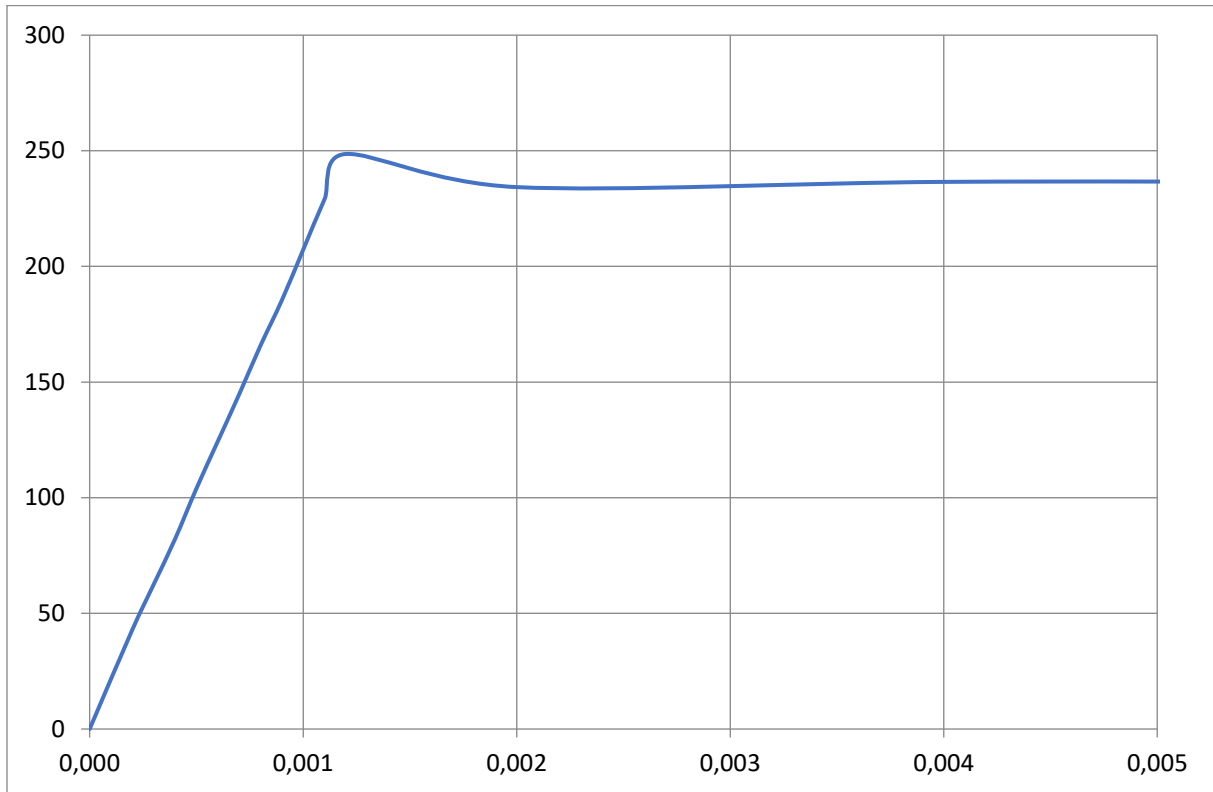
Charge axiale (en N)	Allongement (en mm) sur une longueur de référence de 50 mm	Charge axiale (en N)	Allongement (en mm) sur une longueur de référence de 50 mm
0	0	31400	0.300
5700	0.010	31400	0.400
8300	0.015	31200	0.500
10900	0.020	31400	0.600
13800	0.025	31600	1.250
16500	0.030	35000	2.500
19200	0.035	42300	5.000
22000	0.040	44600	7.500
24600	0.045	45600	10.000
27500	0.050	45600	12.500
30400	0.055	44600	15.000
33000	0.060	43000	17.500
31100	0.100	40200	18.750
31400	0.200		

Corrigé

Il faut tracer $\sigma = f(\varepsilon)$

Avec $\sigma = \frac{F}{\pi \frac{d^2}{4}}$ en MPa et $\varepsilon = \frac{\Delta l}{l}$





$$\begin{aligned}\sigma_e &= 248,6 \text{ MPa} \\ E &= 207,2 \text{ GPa} \\ \frac{\Delta l}{l} &= 37,38 \% \\ \sigma_m &= 343,5 \text{ MPa}\end{aligned}$$

7- (F2) Submersible

Le submersible pour recherches profondes Aluminaut a une coque cylindrique de diamètre extérieur égal à 240 cm et de 14 cm d'épaisseur. Il est construit en alliage d'aluminium 7079-T6 de limite élastique égale à 420 MPa. La masse volumique de l'eau de mer est de 1024 kg.m^{-3} .

- 1) Calculer la contrainte maximale de la partie cylindrique de la coque lorsque le submersible est à 4 500 m de profondeur.
- 2) Quel a été le coefficient de sécurité utilisé ?

Corrigé

- 1) Calcul de la pression hydrostatique à 4 500 m de profondeur :

$$\begin{aligned}P &= \rho \times g \times h + P_{atm} \\ P &= 1024 \times 9,81 \times 4500 + 1,013 \cdot 10^5 = 453 \cdot 10^5 \text{ Pa}\end{aligned}$$

Calcul de la pression effective :

$$\begin{aligned}P_{eff} &= P - P_{atm} \\ P_{eff} &= 453 \cdot 10^5 - 1,013 \cdot 10^5 = 452 \cdot 10^5 \text{ Pa}\end{aligned}$$

Calcul du diamètre moyen de la coque :

$$d = d_{ext} - 2 \left(\frac{e}{2} \right) = 2400 - 140 = 2260 \text{ mm}$$

Calcul de la contrainte dans la coque :

$$\sigma = \frac{P_{eff} \times d}{2 e} = \frac{(452 \cdot 10^5) \times 2260 \cdot 10^{-6}}{2 \times 140} = 365 \text{ MPa}$$

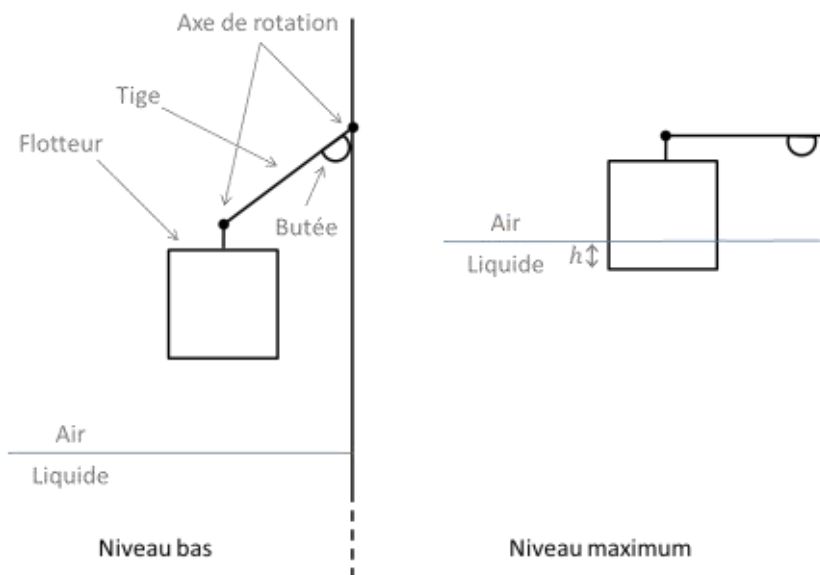
2) Calcul du coefficient de sécurité :

$$s = \frac{\sigma_e}{\sigma} = \frac{420}{365} = 1,15$$

Workshop Fluides

8- Capteur de niveau

Afin d'éviter de remplir manuellement sa citerne toutes les semaines, un particulier souhaite asservir la pompe de son puit en fonction du niveau d'eau dans celle-ci. Son choix s'est porté sur un capteur à flotteur, fixé au bord de la cuve par un axe de rotation (cf schéma ci-dessous). Le flotteur en polystyrène et polypropylène est un cube ($V = 125 \text{ cm}^3$, $\rho = 27 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$) relié à la cuve par une tige de 20 cm. Lorsque le niveau est bas, le flotteur est maintenu dans le vide par une butée. Le capteur envoie le signal d'arrêt à la pompe lorsque la tige est à l'horizontal. Nous négligerons ici la masse de la tige de fixation.



De combien de centimètres devra-t-il décaler le bas du flotteur (h sur le schéma) afin que la pompe se coupe automatiquement pour une hauteur d'un mètre d'eau dans sa citerne ?

Corrigé

Le flotteur « flotte » à la surface car $d_{flotteur} < d_{eau}$:

$$\rho_{flotteur} \times V_{flotteur} \times g = \rho_{eau} \times V_{eau \text{ déplacée}} \times g$$

or

$$V_{\text{flotteur}} = c^3 \text{ d'où } c = \sqrt[3]{V_{\text{flotteur}}} = \sqrt[3]{125} = 5 \text{ cm}$$

$$V_{\text{eau déplacée}} = c^2 \times h$$

Il vient :

$$\rho_{\text{flotteur}} \times c^3 = \rho_{\text{eau déplacée}} \times c^2 \times h$$

$$h = \frac{\rho_{\text{flotteur}} \times c}{\rho_{\text{eau déplacée}}}$$

$$h = \frac{27 \times 5 \cdot 10^{-2}}{998}$$

$$h = 1,4 \cdot 10^{-3} \text{ m, soit } 1,4 \text{ mm.}$$

Cette hauteur est donc négligeable.

9- Ballon sonde

Afin de réaliser les prévisions météorologiques, des capteurs de pression, température et hygrométrie sont envoyés dans le ciel grâce à des ballons-sondes. Ce dernier, rempli d'hélium, est une sphère en toile de 1 m de diamètre pour 50 g.

Données : $\rho_{\text{air}} = 1,225 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ et $\rho_{\text{hélium}} = 0,169 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$

- 1) Quelle est la masse maximale de capteurs que peut emporter ce ballon-sonde ?
- 2) Quelle diamètre devrait avoir le ballon-sonde pour soulever un être humain de 70 kg ?

Corrigé

1) Étant donné que le ballon-sonde monte dans le ciel, nous pouvons écrire :

$$m_{\text{total ballon}} \times g \leq \rho_{\text{air}} \times V_{\text{ballon}} \times g$$

$$\rho_{\text{hélium}} \times V_{\text{hélium}} + m_{\text{toile}} + m_{\text{sondes}} \leq \rho_{\text{air}} \times V_{\text{ballon}}$$

$$m_{\text{sondes}} \leq \rho_{\text{air}} \times V_{\text{ballon}} - \rho_{\text{hélium}} \times V_{\text{hélium}} + m_{\text{toile}}$$

$$m_{\text{sondes}} \leq \rho_{\text{air}} \times \frac{4}{3} \pi \left(\frac{d}{2}\right)^3 - \rho_{\text{hélium}} \times \frac{4}{3} \pi \left(\frac{d}{2}\right)^3 + m_{\text{toile}}$$

$$m_{\text{sondes}} \leq 1,225 \times \frac{4}{3} \pi \left(\frac{1}{2}\right)^3 - 0,169 \times \frac{4}{3} \pi \left(\frac{1}{2}\right)^3 + 50 \cdot 10^{-3}$$

$$m_{\text{sondes}} \leq 0,50 \text{ kg}$$

2) De même,

$$\rho_{\text{hélium}} \times V_{\text{hélium}} + m_{\text{toile}} + m_{\text{humain}} \leq \rho_{\text{air}} \times V_{\text{ballon}}$$

$$\rho_{\text{air}} \times V_{\text{ballon}} - \rho_{\text{hélium}} \times V_{\text{hélium}} \geq m_{\text{toile}} + m_{\text{humain}}$$

$$\text{or } V_{\text{hélium}} = V_{\text{ballon}}$$

$$V_{\text{ballon}} \geq \frac{m_{\text{toile}} + m_{\text{ballon}}}{\rho_{\text{air}} - \rho_{\text{hélium}}}$$

or

$$V = \frac{4}{3} \pi \left(\frac{d}{2}\right)^3$$

$$V = \frac{4}{3} \pi \frac{d^3}{8}$$

$$d = \sqrt[3]{\frac{6 \times V}{\pi}}$$

d'où

$$d \geq \sqrt[3]{\frac{6}{\pi} \times \frac{m_{\text{toile}} + m_{\text{ballon}}}{\rho_{\text{air}} - \rho_{\text{hélium}}}}$$

$$d \geq \sqrt[3]{\frac{6}{\pi} \times \frac{50.10^{-3} + 70}{1,225 - 0,169}}$$

$$d \geq 5 \text{ m}$$

$$V_{\text{ballon}} \geq 66,3 \text{ m}^3$$

Workshop transferts thermiques

10- (F2) Comparaison simple et double vitrage

1) Soit un vitrage simple d'épaisseur $e_v = 5 \text{ mm}$, de conductivité $\lambda_v = 1,15 \text{ W.m}^{-1}.\text{°C}^{-1}$. La température intérieure T_i est 20 °C , la température extérieure T_e est 0 °C . La surface vitrée de l'appartement est de 15 m^2 . On admet généralement les valeurs suivantes pour les coefficients de convection :

- $h_i = 8 \text{ W.m}^{-2}.\text{K}^{-1}$ pour l'intérieur,
- $h_e = 23 \text{ W.m}^{-2}.\text{K}^{-1}$ pour l'extérieur.

a) Calculer la résistance thermique du vitrage.

b) Déterminer le flux thermique dissipé à travers ce vitrage.

c) Quelle est la température de la surface intérieure du vitrage ?

2) On considère les mêmes conditions que précédemment mais avec un double vitrage composé de deux vitres de 5 mm séparées par une lame d'air de 1 cm . On négligera les effets de la convection dans la lame d'air. La conductivité de l'air est égale à $\lambda = 0,0242 \text{ W.m}^{-1}.\text{°C}^{-1}$.

a) Calculer la résistance thermique du vitrage.

b) Déterminer le flux thermique dissipé à travers ce vitrage.

c) Quelle est la température de la surface intérieure du vitrage ?

3) Comparer les valeurs obtenues dans les deux cas et conclure.

Corrigé :

simple vitrage

1) a) Nous avons, en série, la convection intérieure, la conduction dans le verre puis la convection extérieure :

$$R_{th} = \frac{1}{h_i \cdot S} + \frac{e_v}{\lambda_v \cdot S} + \frac{1}{h_e \cdot S}$$

$$\text{AN : } R_{th} = \frac{1}{8 \times 15} + \frac{5 \cdot 10^{-3}}{1,15 \times 15} + \frac{1}{23 \times 15} = 0,0115 \text{ °C. W}^{-1}$$

$$\text{b) } \phi = \frac{\Delta T}{R_{th}} = \frac{T_i - T_e}{R_{th}}$$

$$\text{AN : } \phi = \frac{20-0}{0,0115} = 1735,85 \text{ W}$$

$$\text{c) } \phi = \frac{T_i - T_{pi}}{\frac{1}{h_i S}} = h_i \cdot S (T_i - T_{pi}) \rightarrow T_{pi} = T_i - \frac{\phi}{h_i S} \quad (\text{car le flux est constant})$$

$$\text{AN : } T_{pi} = 20 - \frac{1735,85}{8 \times 15} = 5,53 \text{ }^\circ\text{C}$$

double vitrage

On néglige la convection dans la lame d'air donc on considère que l'air se comporte comme un solide (car fluide statique) avec une épaisseur e_a et une conductivité λ_a .

$$\text{2) a) } R_{th} = \frac{1}{h_i S} + \frac{e_v}{\lambda_v S} + \frac{e_a}{\lambda_a S} + \frac{e_v}{\lambda_v S} + \frac{1}{h_e S}$$

$$\text{AN : } R_{th} = \frac{1}{8 \times 15} + \frac{5 \cdot 10^{-3}}{1,15 \times 15} + \frac{1 \cdot 10^{-2}}{0,0242 \times 15} + \frac{5 \cdot 10^{-3}}{1,15 \times 15} + \frac{1}{23 \times 15} = 0,04 \text{ }^\circ\text{C} \cdot \text{W}^{-1}$$

$$\text{b) } \phi = \frac{\Delta T}{R_{th}} = \frac{T_i - T_e}{R_{th}}$$

$$\text{AN : } \phi = \frac{20-0}{0,04} = 500 \text{ W}$$

$$\text{c) } \phi = \frac{T_i - T_{pi}}{\frac{1}{h_i S}} = h_i S (T_i - T_{pi}) \rightarrow T_{pi} = T_i - \frac{\phi}{h_i S} \quad (\text{car le flux est constant})$$

$$\text{AN : } T_{pi} = 20 - \frac{500}{8 \times 15} = 15,83 \text{ }^\circ\text{C}$$

3) On constate que la double isolation est plus performante avec une déperdition de chaleur moindre que dans le cas du simple vitrage.

$$\frac{1735,85 - 500}{1735,85} \times 100 = 72,2 \text{ \% de réduction du flux.}$$

11- (F3) Chambre froide

Soit une paroi de chambre froide de 3,5 m de hauteur et de 4 m de longueur, constituée par un mur de maçonnerie et une plaque collée de liège d'épaisseurs respectives 80 cm et 2 cm. La paroi est percée d'une porte de 1,5 m x 2 m, constituée d'une épaisseur de 4 cm de bois recouverte d'une couche de liège granulé de 2,2 cm d'épaisseur. La température de la face intérieure de la paroi est de -12 °C et la température de la face extérieure est de 12 °C.

Calculer le flux thermique traversant la paroi.

Les conductivités thermiques moyennes des différents matériaux sont données ci-dessous :

Matériau	λ (W.m ⁻¹ .°C ⁻¹)
maçonnerie	$\lambda_m = 2,25$
liège	$\lambda_l = 0,039$
bois	$\lambda_b = 0,107$
liège granulé	$\lambda_{lg} = 0,05$

Corrigé :

Résistance thermique du mur

$$\text{Surface du mur : } S = 3,5 \times 4 - 1,5 \times 2 = 11 \text{ m}^2$$

$$\text{Couche en série donc : } R_{th m} = \frac{e_m}{\lambda_m S} + \frac{e_l}{\lambda_l S}$$

$$\text{AN : } R_{th m} = \frac{80 \cdot 10^{-2}}{2,25 \times 11} + \frac{2 \cdot 10^{-2}}{0,039 \times 11} = 0,079 \text{ }^\circ\text{C} \cdot \text{W}^{-1}$$

Résistance thermique de la porte

Surface de la porte : $S = 1,5 \times 2 = 3 \text{ m}^2$

$$R_{th p} = \frac{e_b}{\lambda_b \cdot S} + \frac{e_{lg}}{\lambda_{lg} \cdot S}$$

AN : $R_{th p} = \frac{4 \cdot 10^{-2}}{0,107 \times 3} + \frac{2,2 \cdot 10^{-2}}{0,05 \times 3} = 0,271 \text{ } ^\circ\text{C} \cdot \text{W}^{-1}$

Résistance thermique totale (mur et porte EN PARALLELE)

$$\frac{1}{R_{th T}} = \frac{1}{R_{th m}} + \frac{1}{R_{th p}} \rightarrow R_{th T} = \frac{R_{th m} \times R_{th p}}{R_{th m} + R_{th p}}$$

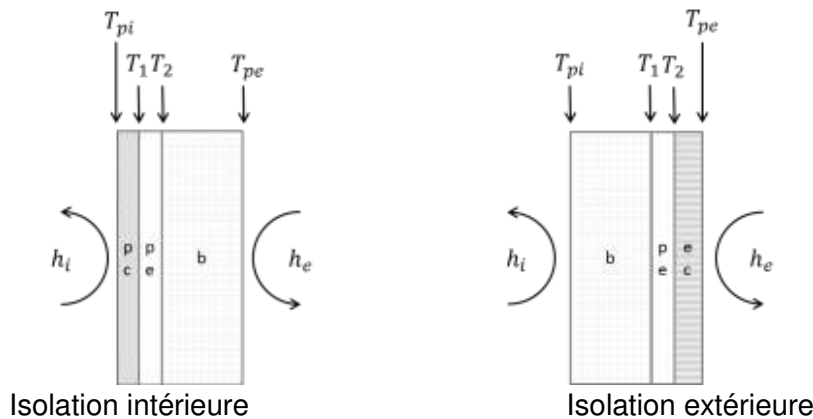
AN : $R_{th T} = \frac{0,079 + 0,271}{0,079 \times 0,271} = 0,0611 \text{ } ^\circ\text{C} \cdot \text{W}^{-1}$

$$\phi = \frac{T_e - T_i}{R_{th T}}$$

AN : $\phi = \frac{12 - (-12)}{0,0611} = 392,8 \text{ W}$

12- (F2) Comparaison isolation intérieure / isolation extérieure

Un mur de béton sépare deux milieux. La température du milieu intérieur est de 20 °C. La température du milieu extérieur est de -5 °C. Pour renforcer thermiquement cette paroi, nous sommes amenés à placer des matériaux isolants, côté intérieur ou côté extérieur.



- Isolation intérieur. Dans l'ordre, de l'intérieur vers l'extérieur :
 - plâtre cartonné ($e_{pc} = 1 \text{ cm}$, $\lambda_{pc} = 0,70 \text{ W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$),
 - polystyrène expansé ($e_{pe} = 5 \text{ cm}$, $\lambda_{pe} = 0,036 \text{ W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$),
 - béton ($e_b = 20 \text{ cm}$, $\lambda_b = 1,4 \text{ W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$).
- Isolation extérieur. Dans l'ordre, de l'intérieur vers l'extérieur :
 - béton ($e_b = 20 \text{ cm}$, $\lambda_b = 1,4 \text{ W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$),
 - polystyrène expansé ($e_{pe} = 5 \text{ cm}$, $\lambda_{pe} = 0,036 \text{ W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$),
 - enduit ciment ($e_{ec} = 1,5 \text{ cm}$, $\lambda_{ec} = 1,15 \text{ W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$).

Données : coefficient d'échange $h_i = 9,1 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-1}$ et $h_e = 16,67 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-1}$.

- 1) Calculer la résistance thermique surfacique du mur dans les deux configurations.
- 2) Calculer la température entre les différents matériaux du mur dans les deux cas.

3) Comparer et conclure.

Corrigé :

1) Isolation intérieure : différentes parois en série

$$r_{th i} = \frac{1}{h_i} + \frac{e_{pc}}{\lambda_{pc}} + \frac{e_{pe}}{\lambda_{pe}} + \frac{e_b}{\lambda_b} + \frac{1}{h_e}$$

$$\text{AN : } r_{th i} = \frac{1}{9,1} + \frac{1 \cdot 10^{-2}}{0,7} + \frac{5 \cdot 10^{-2}}{0,036} + \frac{20 \cdot 10^{-2}}{1,4} + \frac{1}{16,67} = 1,716 \text{ m}^2 \cdot \text{K} \cdot \text{W}^{-1}$$

Isolation extérieure : différentes parois en série

$$r_{th e} = \frac{1}{h_i} + \frac{e_b}{\lambda_b} + \frac{e_{pe}}{\lambda_{pe}} + \frac{e_{ec}}{\lambda_{ec}} + \frac{1}{h_e}$$

$$\text{AN : } r_{th e} = \frac{1}{9,1} + \frac{20 \cdot 10^{-2}}{1,4} + \frac{5 \cdot 10^{-2}}{0,036} + \frac{1,5 \cdot 10^{-2}}{1,15} + \frac{1}{16,67} = 1,716 \text{ m}^2 \cdot \text{K} \cdot \text{W}^{-1}$$

2) Isolation intérieure

Calcul du flux de chaleur dans le mur

$$\varphi_i = \frac{T_i - T_e}{r_{th i}}$$

$$\text{AN : } \varphi_i = \frac{20+5}{1,716} = 14,57 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2}$$

Calcul des différentes températures entre les différents matériaux

$$\varphi_i = \frac{T_{pe} - T_e}{\frac{1}{h_e}} \rightarrow T_{pe} = \varphi_i \times \frac{1}{h_e} + T_e$$

$$\text{AN : } T_{pe} = 14,57 \times \frac{1}{16,67} + (-5) = -4,1 \text{ } ^\circ\text{C}$$

$$\varphi_i = \frac{T_2 - T_{pe}}{\frac{e_b}{\lambda_b}} \rightarrow T_2 = \varphi_i \times \frac{e_b}{\lambda_b} + T_{pe}$$

$$\text{AN : } T_2 = 14,57 \times \frac{20 \cdot 10^{-2}}{1,4} + (-4,1) = -2 \text{ } ^\circ\text{C}$$

$$\varphi_i = \frac{T_1 - T_2}{\frac{e_{pe}}{\lambda_{pe}}} \rightarrow T_1 = \varphi_i \times \frac{e_{pe}}{\lambda_{pe}} + T_2$$

$$\text{AN : } T_1 = 14,57 \times \frac{5 \cdot 10^{-2}}{0,036} + (-2) = 18,2 \text{ } ^\circ\text{C}$$

$$\varphi_i = \frac{T_i - T_{pi}}{\frac{1}{h_i}} \rightarrow T_{pi} = T_i - \varphi_i \times \frac{1}{h_i}$$

$$\text{AN : } T_{pi} = 20 - 14,57 \times \frac{1}{9,1} = 18,4 \text{ } ^\circ\text{C}$$

Isolation extérieure

$$\varphi_e = \frac{T_i - T_e}{r_{th e}}$$

$$\text{AN : } \varphi_e = \frac{20+5}{1,716} = 14,57 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2}$$

Calcul des différentes températures entre les différents matériaux

$$\varphi_e = \frac{T_{pe} - T_e}{\frac{1}{h_e}} \rightarrow T_{pe} = \varphi_e \times \frac{1}{h_e} + T_e$$

$$\text{AN : } T_{pe} = 14,57 \times \frac{1}{16,67} + (-5) = -4,1 \text{ } ^\circ\text{C}$$

$$\varphi_e = \frac{T_2 - T_{pe}}{\frac{e_{ec}}{\lambda_{ec}}} \rightarrow T_2 = \varphi_e \times \frac{e_{ec}}{\lambda_{ec}} + T_{pe}$$

$$\text{AN : } T_2 = 14,57 \times \frac{1,5 \cdot 10^{-2}}{1,15} + (-4,1) = -3,9 \text{ } ^\circ\text{C}$$

$$\varphi_e = \frac{T_1 - T_2}{\frac{e_{ep}}{\lambda_{ep}}} \rightarrow T_1 = \varphi_e \times \frac{e_{ep}}{\lambda_{ep}} + T_2$$

$$\text{AN : } T_1 = 14,57 \times \frac{5 \cdot 10^{-2}}{0,036} + (-3,9) = 16,35 \text{ } ^\circ\text{C}$$

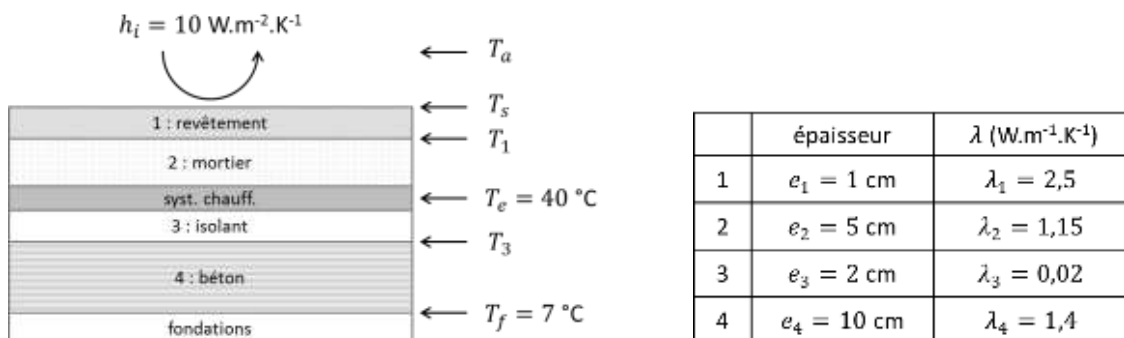
$$\varphi_e = \frac{T_i - T_{pi}}{\frac{1}{h_i}} \rightarrow T_{pi} = T_i - \varphi_e \times \frac{1}{h_i}$$

$$\text{AN : } T_{pi} = 20 - 14,57 \times \frac{1}{9,1} = 18,4 \text{ } ^\circ\text{C}$$

3) Que l'isolation soit intérieure ou extérieure, la densité de flux ainsi que la température sur la paroi interne sont identiques. La seule différence est que dans le cas de l'isolation extérieure, la température moyenne du béton est de 17,35 °C alors qu'elle est de -3 °C pour l'isolation intérieure. La maison à isolation extérieure est dite à inertie, c'est-à-dire que la température à l'intérieur chutera moins vite après l'extinction du chauffage grâce à la chaleur accumulée dans le béton.

13- (F3) Chauffage au sol

Dans le plancher d'un local de surface $S = 16 \text{ m}^2$, nous avons incorporé un système de chauffage maintenant la température ambiante à $T_a = 20 \text{ } ^\circ\text{C}$.



- 1) Calculer la densité de flux φ_1 émis vers le haut par le système de chauffage.
- 2) Calculer la densité de flux φ_2 émis vers le bas par le système de chauffage.

- 3) En déduire la puissance thermique utile (reçue par le local), la puissance perdue ainsi que la puissance fournie par le système de chauffage. Quel est le rendement du chauffage ?
4) Calculer les températures T_s , T_1 , T_3 et T_f .

Corrigé :

1) Calcul du flux émis vers le haut :

$$\varphi_1 = \frac{\Delta T}{r_{th1}} = \frac{T_e - T_a}{r_{th1}} \quad \text{avec} \quad r_{th1} = \frac{1}{h_i} + \frac{e_1}{\lambda_1} + \frac{e_2}{\lambda_2}$$

$$\text{AN : } r_{th1} = \frac{1}{10} + \frac{10^{-2}}{2,5} + \frac{5 \cdot 10^{-2}}{1,15} = 0,147 \text{ m}^2\text{K} \cdot \text{W}^{-1}$$

$$\varphi_1 = \frac{40-20}{0,147} = 136 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2}$$

2) Calcul du flux émis vers le bas

$$\varphi_2 = \frac{\Delta T}{r_{th2}} = \frac{T_e - T_f}{r_{th2}} \quad \text{avec} \quad r_{th2} = \frac{e_3}{\lambda_3} + \frac{e_4}{\lambda_4}$$

$$\text{AN : } r_{th2} = \frac{2 \cdot 10^{-2}}{0,02} + \frac{10 \cdot 10^{-2}}{1,4} = 1,07 \text{ m}^2\text{K} \cdot \text{W}^{-1}$$

$$\varphi_2 = \frac{40-7}{1,07} = 30,8 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2}$$

3) Puissance reçue par le local

$$\phi_1 = \varphi_1 \times S$$

$$\text{AN : } \phi_1 = 136 \times 16 = 2176 \text{ W}$$

Puissance perdue

$$\phi_2 = \varphi_2 \times S$$

$$\text{AN : } \phi_2 = 30,8 \times 16 = 492,8 \text{ W}$$

Puissance du chauffage

$$P = \phi_1 + \phi_2$$

$$\text{AN : } P = 492,8 + 2176 = 2668,8 \text{ W}$$

Calcul du rendement

$$\eta = \frac{\phi_1}{P}$$

$$\text{AN : } \eta = \frac{2176}{2668,8} = 0,815 \text{ ou } 81,5 \%$$

4) Calcul des différentes températures

$$\varphi_1 = \frac{T_s - T_a}{\frac{1}{h}} \rightarrow T_s = \varphi_1 \times \frac{1}{h} + T_a$$

$$\text{AN : } T_s = 136 \times \frac{1}{10} + 20 = 33,6 \text{ }^\circ\text{C}$$

$$\varphi_1 = -\frac{T_e - T_1}{\frac{e_2}{\lambda_2}} \rightarrow T_1 = -\varphi_1 \times \frac{e_2}{\lambda_2} + T_e$$

$$\text{AN : } T_1 = -136 \times \frac{5 \cdot 10^{-2}}{1,15} + 40 = 34 \text{ }^\circ\text{C}$$

$$\varphi_2 = \frac{T_e - T_3}{\frac{e_3}{\lambda_3}} \rightarrow T_3 = -\varphi_2 \times \frac{e_3}{\lambda_3} + T_e$$

$$\text{AN : } T_3 = -30,8 \times \frac{2 \cdot 10^{-2}}{0,02} + 40 = 9,2 \text{ } ^\circ\text{C}$$

Cours et exercices d'électrostatique et magnétostatique

Chapitre 1 : Electrostatique

1.1 La charge électrique

- Tous les corps frottés attirent les corps légers. Les forces mises en jeu sont attribuées à l'électrisation, c'est-à-dire à l'apparition d'électricité à la surface du corps frotté.
- On distingue deux types de matériaux : les isolants pour lesquels le phénomène d'électrisation n'est que local, et les conducteurs pour lesquels il y a un phénomène global d'électrisation.
- En 1881, J. Thomson a montré qu'il existait des particules élémentaires chargées communes à tous les corps : c'est l'électron. C'est la plus petite quantité d'électricité qu'on ait pu mettre en évidence.
- Les particules peuvent être séparées en deux classes conventionnelles : les charges positives et négatives.
- En 1910, Millikan a montré que la charge électrique d'un système ne peut varier que par multiples entiers d'un charge élémentaire de valeur :

$$e = 1.6022 \times 10^{-19} \text{ C}$$

- La charge d'un système quelconque est donc :

$$Q = Z e \quad \text{avec } Z \text{ un entier}$$

- La charge totale d'un système isolé ne change jamais. C'est-à-dire la somme algébrique des charges positives et négatives présentes à un instant quelconque reste toujours constante. Dans un état non électrisé, un corps contient autant de charges positives que négative.

Il est intéressant de voir que les porteurs stables usuels de ces deux types de charge aient des masses différentes :

- l'électron sa charge est : $q_{e^-} = -e = -1.6022 \times 10^{-19} \text{ C}$
sa masse est : $m_{e^-} = 0.911 \times 10^{-30} \text{ kg}$

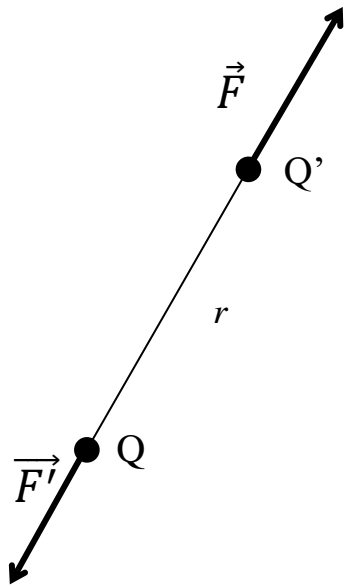
- Le proton sa charge est : $q_{p^+} = +e = +1.6022 \times 10^{-19} \text{ C}$
sa masse est : $m_{p^+} = 1.672 \times 10^{-27} \text{ kg}$

- Depuis les années 60, on a postulé l'existence de quarks dont la charge est une fraction de e . Cependant, ils n'ont pas été observés à l'état libre, mais la théorie les prédit.

1.2 La loi de Coulomb

- L'interaction électrostatique obéit à des lois quantitatives simples interprétées par Coulomb en 1785. Elle est de même forme que l'interaction gravitationnelle.

Définition : deux charges électriques stationnaires s'attirent ou se repoussent mutuellement. Donc considérons deux charges Q et Q' , la force exercée par Q sur Q' est d'après Coulomb : une force centrale, c'est-à-dire portée par l'axe qui relie les charges, d'intensité proportionnelle au produit de la valeur des charges et inversement proportionnelle au carré de la distance qui les sépare.



Si \vec{u} est un vecteur unitaire de l'axe qui passe par les charges on peut écrire :

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{QQ'}{r^2} \vec{u}$$

Unités : F en Newton (N), Q et Q' sont en Coulomb (C), et la distance r en (m)

ϵ_0 est la permittivité du vide et sa valeur est :

$$\epsilon_0 \approx 8.854 \times 10^{-12}$$

On a l'habitude de poser :

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 9 \times 10^9$$

- Cette loi a été vérifiée expérimentalement pour des distances supérieures à 10^{-14} m et des distances inférieures à quelques kilomètres.
- A la même distance, un proton et un électron, deux protons, deux électrons, s'attirent ou se repoussent avec la même intensité
- Exemple : Atome d'Hydrogène = 1 proton + 1 électron à une distance égale « en moyenne » à 0.5×10^{-10} m

$$F_{\text{grav}} = 4 \times 10^{-47} \text{ N} \ll F_{\text{él}} = 8 \times 10^{-8} \text{ N}$$

Gravitation est négligeable sur le plan atomique

La matière ordinaire tend à rester neutre

Les forces électriques dominent la chimie

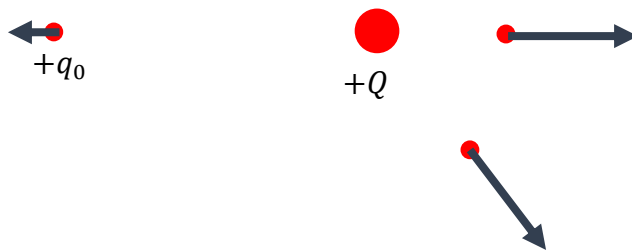
- ⊗ Les interactions électriques n'expliquent pas pourquoi les atomes et molécules sont stables. Cela est traité par la Mécanique QUANTIQUE

Unité pratique : En pratique on ne sait pas manipuler une charge de 1C. Deux charges de 1C à 1 km se repousseraient avec une force de près de 1 tonne, le microcoulomb apparaît comme une unité plus raisonnable en électrostatique (pas en électrocinétique, où $1\text{C/s} = 1$ ampère)

Le champ électrique \vec{E}

Nous allons introduire le concept de champ électrique, bien utile pour modéliser les interactions entre les charges électriques.

Le dessin ci-dessous représente le champ électrique créé par une charge ponctuelle :



Soit Q une charge source et q_0 une charge test

- La présence de charges dans un espace crée des conditions telles qu'une charge isolée placée dans cet espace sera soumise à une force électrique.
- Chaque point de l'espace peut être **caractérisé** par un vecteur \vec{E} où une charge q_0 subit l'action d'une force \vec{F} (due à l'interaction électrique avec Q). Cette force est **proportionnelle** à q_0 .

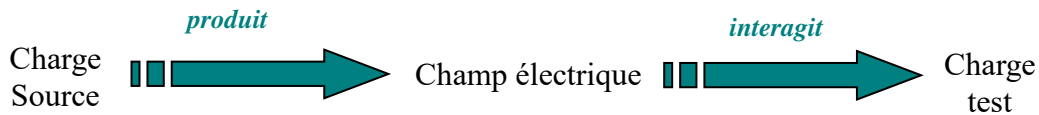
$$\vec{F} = q_0 \vec{E}$$

- Donc le champ électrique créé est :

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_0}$$

$\vec{E}(x, y, z)$ est un **champ vectoriel**

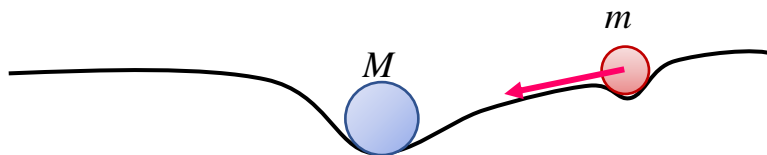
Unité du champ électrique : en $V.m^{-1}$



A retenir : en pratique les informations échangées entre deux appareils électriques, reliés par un système WiFi par exemple, se font par l'intermédiaire du champ électrique (on verra qu'il faut y ajouter un second vecteur, mais qui ne change rien) et non pas par des charges électriques.

Analogie mécanique :

Imaginons une membrane élastique sur laquelle on vient poser une masse M (analogie avec Q), puis une masse m (analogie avec q_0). Quelqu'un qui, ne voyant pas la membrane, et constaterait une attraction pourrait l'interpréter comme une action à distance, alors qu'en fait une masse "ressent" la courbure que l'autre impose à la membrane. De même pour on dira qu'une charge électrique q_0 placée dans le champ des charges Q voit une déformation locale de l'espace que mesure justement le vecteur $\vec{E}(x, y, z)$. Les propriétés locales de l'espace sont modifiées par la charge Q et on s'en aperçoit en y mettant une charge q_0 .



La charge q_0 interagit avec Q et risque de la déplacer et de modifier le champ: On **définit** le champ électrique par :

$$\vec{E} = \lim_{q_0 \rightarrow 0} \frac{\vec{F}}{q_0}$$

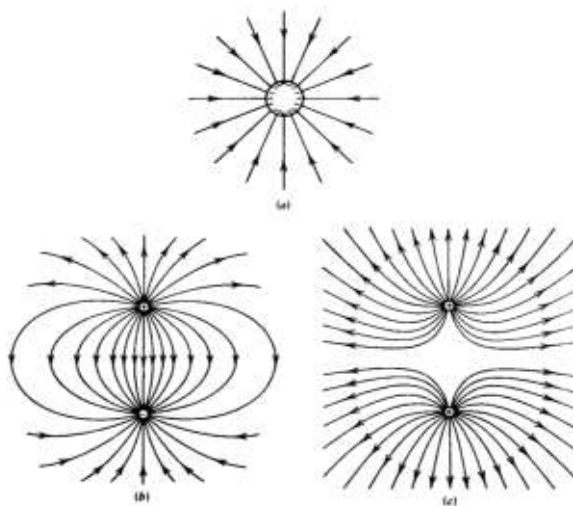
Remarque : Le champ électrique n'a de sens qu'en maintenant immobiles les autres charges.

Analogie contextuelle :

Pour donner une autre image, on peut dire que le champ électrique \vec{E} n'est pas une force, mais une **sollicitation** de l'espace dans un volume donné, et que dès qu'une particule chargée q_0 traverse ce volume, elle est soumise à une **force** $\vec{F} = q_0\vec{E}$

Pour finir ce paragraphe quelques définitions :

- **Lignes de champ**
- On appelle ligne de champ toute courbe tangente en chacun de ses points au vecteur champ électrostatique en ce point.
- La **densité** (surfaccique) des lignes est proportionnelle à l'**intensité** du champ
- Les lignes de champs **ne se croisent jamais** puisqu'en chaque point la direction du champ est **unique**.
- Les lignes vont des charges positives aux charges négatives



Lignes de champ électrique pour :

(a) une charge négative isolée

(b) deux charges isolées de signes opposés

(c) deux charges isolées de mêmes signes. Les lignes de champ partent de la charge positive

- **Equation des Lignes de champ :**

En écrivant que sur une ligne de champ $\vec{E}(x, y, z)$ est tangent à la ligne, c'est-à-dire $\vec{E} \wedge \vec{dl} = 0$ où \vec{dl} représente un vecteur déplacement infinitésimal, on obtient en coordonnées cartésiennes :

$$\frac{dx}{E_x} = \frac{dy}{E_y} = \frac{dz}{E_z}$$

et en coordonnées cylindriques:

$$\frac{d\rho}{E_\rho} = \frac{\rho d\theta}{E_\theta} = \frac{dz}{E_z}$$

1.3 Champ électrique créée par une charge ponctuelle

Considérons en un point M une charge q en interaction coulombienne avec une charge q_i située au point M_i . D'après la loi de Coulomb et avec \vec{U}_i le vecteur unitaire de l'axe $\overline{M_iM}$ on a:

$$\vec{E}_i(M) = \frac{\overline{F_{M_iM}}}{q} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_i}{M_iM^2} \vec{U}_i = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_i}{M_iM^2} \frac{\overline{M_iM}}{M_iM} \text{ car } \vec{U}_i = \frac{\overline{M_iM}}{M_iM}$$

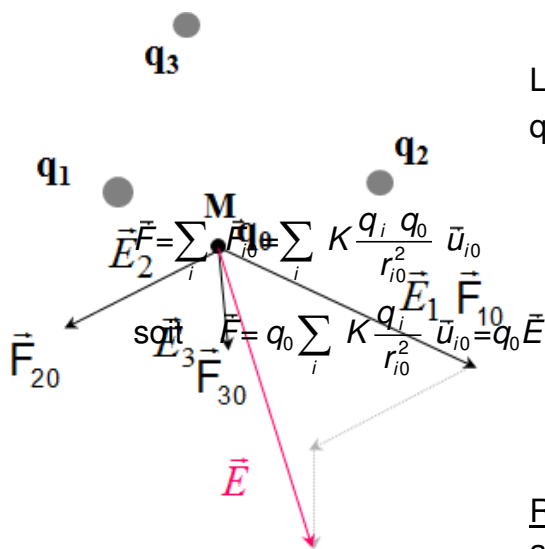
On a alors le **champ électrostatique** (on parle aussi de champ électrique) créé en M par la charge q_i située en M_i :

$$\vec{E}_i(M) = \frac{\overline{F_{M_iM}}}{q} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_i}{M_iM^2} \frac{\overline{M_iM}}{M_iM}$$

L'unité SI du champ électrostatique est le volt par mètre ($V.m^{-1}$).

1.4 Champ électrique créé par un ensemble de charges

- **Principe de superposition** : Le principe de superposition est utilisé pour déterminer la force exercée par un ensemble de N charges (q_1, \dots, q_N) placées à des distances r_1, \dots, r_N d'une charge q_0 .
- Soit un système de charges ponctuelles q_i fixées aux points M_i . Plaçons en un point M quelconque une charge q_0 les q_i restant immobiles. Soit \vec{u}_{i0} le vecteur unitaire de l'axe M_iM .



La charge q_0 se trouve soumise à une force qui est la somme vectorielle des \vec{F}_{i0}

Remarque: Il ne s'agit pas que d'une simple addition vectorielle, mais du fait non banal que

ni \vec{F}_{10} ni \vec{F}_{20} ni \vec{F}_{30} ne sont affectées par la présence des autres charges.

Le vecteur champ électrique \vec{E} créé par un ensemble de charges est identique à la somme des champs individuels créée par chacune des charges. Il est caractéristique de la distribution de charges q_i , indépendamment de q_0 . C'est un vecteur fonction du point M .

Supprimons l'indice zéro, en notant simplement $r_i = M_iM$ et

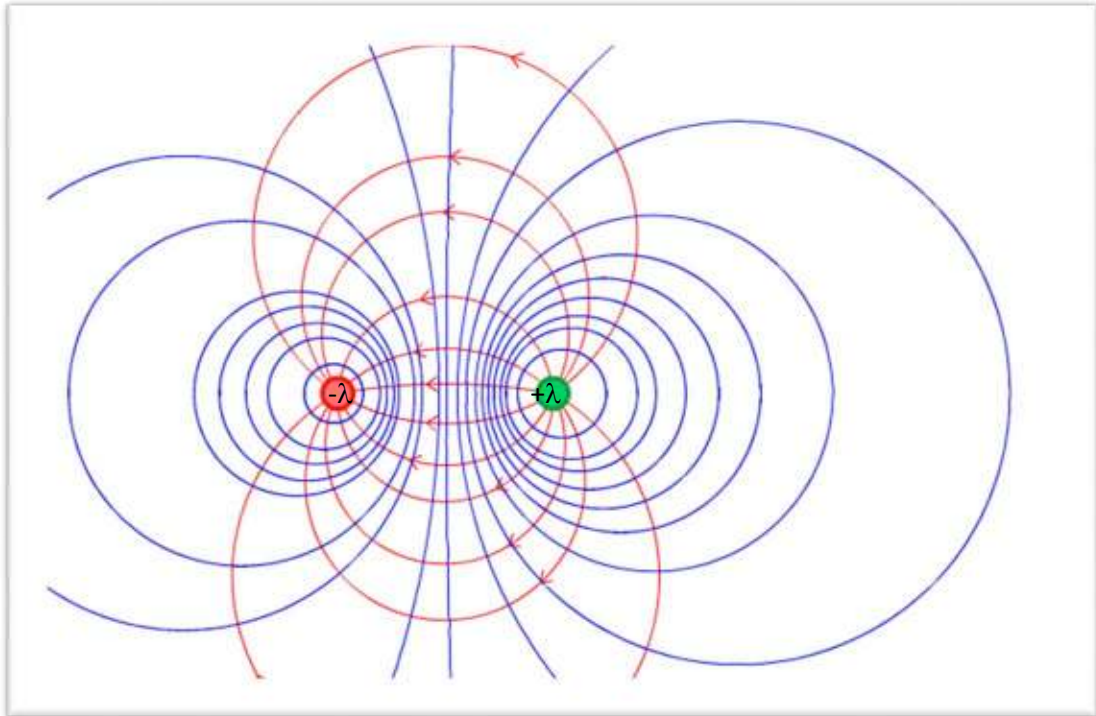
$$\vec{u}_i = \frac{\vec{M_iM}}{r_i}$$

le champ \vec{E} créé par un ensemble de charges q_i est :

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^3 \left(\frac{q_i}{r_i^2} \right) \vec{u}_i$$

Pour calculer la force qui s'exerce sur une charge q_0 il suffit de connaître le champ électrique dans cette région.

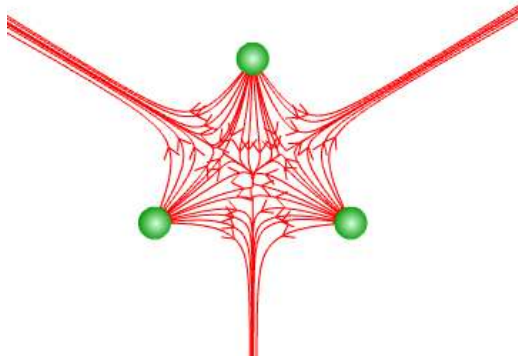
Exemples de champs créés par des distributions de charges



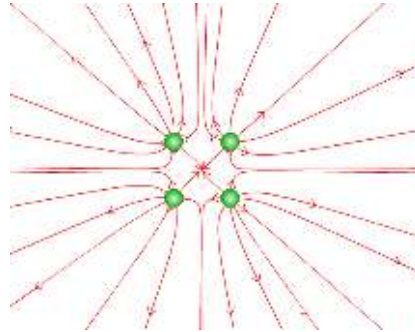
Deux conducteurs filiformes C et C' parallèles, situés à une distance d l'un de l'autre, portant respectivement les densités linéaires $-\lambda$ et $+\lambda$, les lignes de champs sont les courbes fléchées.

Obtenues avec l'applet :

http://www.sciences.univ-nantes.fr/sites/genevieve_tulloue/Elec/Champs/lignes_champE.html#manip



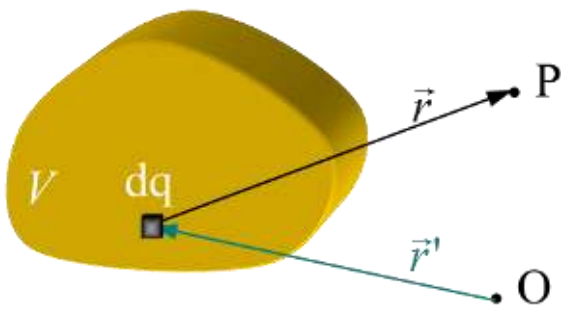
3 électrons



4 protons

Calcul du champ électrique d'une distribution continue de charges

$$dq = \rho(\vec{r}') dV'$$



dV' élément de volume infinitésimal

$\rho(\vec{r}')$ **densité** de charge

La distribution crée au point P le champ :

$$\vec{E}(\vec{r}) = \int \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\rho(\vec{r}')}{r^2} \vec{u}_r \cdot dV'$$

où $\vec{u}_r = \frac{\vec{r}}{r}$ est un vecteur unitaire.

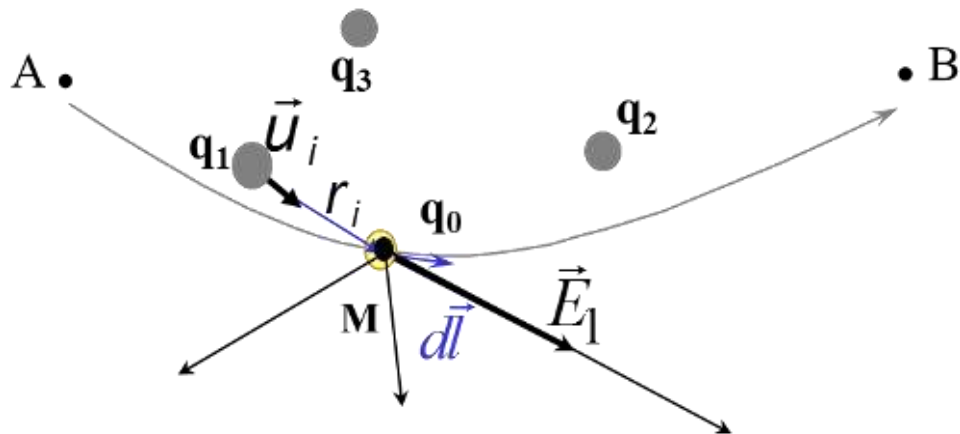
Selon la distribution: $\int \dots dV'$ sera soit une intégrale de volume, soit une intégrale de surface, soit une intégrale curviligne. Il est souvent possible de simplifier le calcul de l'intégrale lorsque la distribution présente des éléments de symétrie.

1.5 Circulation de \vec{E} : le potentiel électrique

But: Montrer que le champ dérive d'une énergie potentielle.

Reprenons notre distribution de charges. Soit W_{AB} le travail de la force électrique $q_0\vec{E}$ lorsque la charge $q_0\vec{E}$ se déplace du point A au point B le long d'un chemin donné:

$$W_{AB} = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{l} = q_0 \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l}$$



Du principe de superposition des champs \vec{E}_i résulte l'addition scalaire de leurs circulations :

$$\vec{E} \cdot d\vec{l} = \left(\sum_{i=1}^N \vec{E}_i \right) \cdot d\vec{l}$$

Ecrivons la circulation élémentaire de \vec{E}_i , soit $\vec{E}_i \cdot d\vec{l} = E_i \vec{u}_i \cdot d\vec{l}$

avec :

$$\vec{E}_i = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_i}{r_i^2} \vec{u}_i$$

Il y a deux façons de calculer le produit scalaire $\vec{u}_i \cdot d\vec{l}$

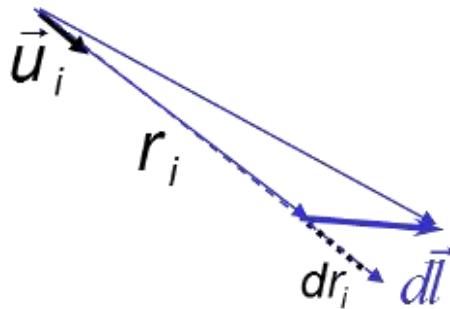
On peut différencier $d\vec{l} = d\vec{r}_i = d(r_i \vec{u}_i) = r_i d\vec{u}_i + \vec{u}_i dr_i$

Puis multiplier scalairement par \vec{u}_i .

Compte tenu que $|\vec{u}_i|^2 = 1$ et que par conséquent $\vec{u}_i \cdot d\vec{u}_i = 0$

on obtient $\vec{u}_i \cdot d\vec{l} = dr_i$

Autre façon (géométrique):



Au premier ordre la différentielle dr_i de la distance r_i se confond avec l'accroissement de la distance r_i qui est égale à la projection de $d\vec{l}$ sur l'axe \vec{u}_i c'est-à-dire $\vec{u}_i \cdot d\vec{l}$

La circulation élémentaire de \vec{E}_i apparaît donc comme la différentielle d'une fonction de r_i :

$$\vec{E}_i \cdot d\vec{l} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_i}{r_i^2} \vec{u}_i \cdot d\vec{l} = \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0} \frac{dr_i}{r_i^2} = -\frac{q_i}{4\pi\epsilon_0} d\left(\frac{1}{r_i}\right)$$

La circulation de A à B apparaît comme la variation d'une fonction de r_i , résultat indépendant du trajet AB:

$$\int_A^B \vec{E}_i \cdot d\vec{l} = -\left[\frac{q_i}{4\pi\epsilon_0 r_i}\right]_A^B$$

- Appelons V_i la fonction de r_i qui apparaît entre crochets :

$$V_i = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_i}{r_i}$$

Et $V(P)$ la fonction scalaire du point P obtenue en additionnant tous les V_j :

$V(P)$ s'appelle le potentiel électrique de la distribution q_i

$$V(P) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^N \frac{q_i}{r_i}$$

Propriétés

1. W_{AB} ne dépend **pas** du chemin emprunté par la charge
2. W_{AB} ne dépend **que** des points de départ (A) et d'arrivée (B)
3. Le potentiel V *n'est pas défini* aux points M_i
4. V tend vers $+\infty$ (resp $-\infty$) lorsqu'on s'approche d'une charge q_i positive (resp négative)
5. Par conséquent, la circulation du champ entre A et B est égale à différence de potentiel ($V_A - V_B$) et non ($V_B - V_A$), c'est-à-dire :

$$\int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l} = V_A - V_B$$

6. Choix d'un point particulier comme 'origine' du potentiel: *Si toutes les charges q_i sont à distance finie*, V tend vers zéro lorsqu'on s'éloigne à l'infini dans n'importe quelle direction (tous les $r_i \rightarrow +\infty$). On peut dire que la « surface de l'infini » est une équipotentielle $V = 0$.
7. $V(x, y, z) =$ champ **scalaire** = **potentiel électrique au point** (x, y, z)

unité de V

$$V = \frac{J}{C} = \text{Volt (V)}$$

8. $V(P)$ intervient directement dans l'expression du travail W_{AB} et se rattache physiquement à l'énergie potentielle d'où le nom de potentiel.

Exemple : Calculer le potentiel d'une charge ponctuelle de $1\mu\text{C}$ à une distance de 1m

Réponse :

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r} = 9 \times 10^9 \times \frac{10^{-6}}{1} = 9000 \text{ V}$$

Energie potentielle d'une charge q

Définition

Le travail fourni par l'extérieur sur une charge q pour la déplacer sous un champ électrique de A vers B représente par définition la variation d'énergie potentielle de la charge q entre les points A et B :

$$\Delta U = [\text{travail de } -q\vec{E}] = -W_{AB} = -\int_A^B q\vec{E} \cdot d\vec{l} = -q[V_A - V_B] = q(V_B - V_A)$$

On sait que l'énergie potentielle est définie à une constante près. Le niveau zéro est fixé arbitrairement en prenant $U(0) = 0$ en un point origine, d'où une fonction $U(P)$:

$$U(P) = -W_{OP} = q[V_P - V_O]$$

Si toutes les charges sont à distances finies alors il est d'usage de choisir O à l'infini. Comme $V(\infty) = 0$ on a simplement:

$$U(P) = qV(P)$$

A retenir : $qV(P)$ = énergie qu'il faut fournir pour transporter la charge q d'un point infiniment éloigné ($V=0$) jusqu'au point P , parmi les charges q_i , étant entendu que la charge q est au repos au départ et à l'arrivée

Un mouvement a priori quelconque de la charge q peut résulter de l'action combinée de la force électrostatique $\vec{F} = q\vec{E}$ et d'une force extérieure appliquée. On peut déplacer q très lentement de A à B en opposant à \vec{F} une contrainte $\vec{f} = -q\vec{E}$. Dans ces conditions le travail fourni par l'extérieur i.e. le travail de \vec{f} représente par définition la *variation d'énergie potentielle* de la charge q :

$$\Delta U \text{ est le travail de } -q\vec{E} = -W_{AB} = -q[\text{circulation de } \vec{E}] \text{ de } A \rightarrow B = q[V_A - V_B]$$

Mouvement d'une particule libre :

Attention au signe algébrique de la charge. Une charge positive libre, lâchée de A sans vitesse initiale, se met en mouvement vers les régions où nécessairement $U(B) < U(A)$, et donc tend à se déplacer vers les plus faibles potentiels V .

Un électron tend à gagner les régions de potentiel élevé positif.

technique de calcul du champ électrique

Soit $f(P)$ une fonction **scalaire**, soit n'importe quelle grandeur fonction du point P
par exemple:

- La température $T(P)$ et la pression p variables d'un point à l'autre dans un fluide
- Le potentiel électrique $V(P)$, une densité de charge, ou une masse volumique $\rho(P)$

Si on a choisi un repère $Oxyz$ la fonction $f(P)$ est décrite par $f(x, y, z)$. Le voisinage du point $P(x, y, z)$ est défini par un vecteur \overrightarrow{dP}

En chaque point P , trois nombres, les trois dérivées partielles de f au point P , suffisent pour calculer la variation df :

$$= \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz$$

On peut mettre cette variation df sous la forme d'un **produit scalaire** :

$$df = \overrightarrow{\text{grad } f} \cdot \overrightarrow{dP}$$

où **le gradient** est par définition un **vecteur** attaché à chaque point P, et ayant comme composantes:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial z} \end{pmatrix}$$

et le vecteur \overrightarrow{dP} un déplacement élémentaire de composantes :

$$\begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix}$$

Reprenons l'expression différentielle locale du potentiel :

$$\vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} d\left(\frac{1}{r}\right) = -d(V)$$

Avec :

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r}$$

En identifiant l'expression différentielle du potentiel et le produit scalaire qui fait intervenir le gradient:

$$d(V) = \overrightarrow{grad} V \cdot d\vec{l}$$

Il

vient

$$\boxed{\vec{E} = -\overrightarrow{grad} V}$$

D'où une technique pour calculer le champ \vec{E} d'une distribution: au lieu de faire la somme vectorielle on calcule le potentiel qui est une somme de scalaire et on dérive conformément à la formule du gradient.

L'opérateur **gradient** qui s'écrit aussi $\vec{\nabla}$ (prononcer « *nabla* ») permet de définir un champ de vecteurs associé au champ scalaire f .

$\vec{\nabla}$ peut être considéré comme un *vecteur* de coordonnées

$$\frac{\partial}{\partial x} \quad \frac{\partial}{\partial y} \quad \frac{\partial}{\partial z}$$

Soit encore :

$$\vec{\nabla} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix}$$

On peut alors écrire formellement :

$$\overrightarrow{grad} f = \vec{\nabla} f$$

qui se lit « *nabla f* »

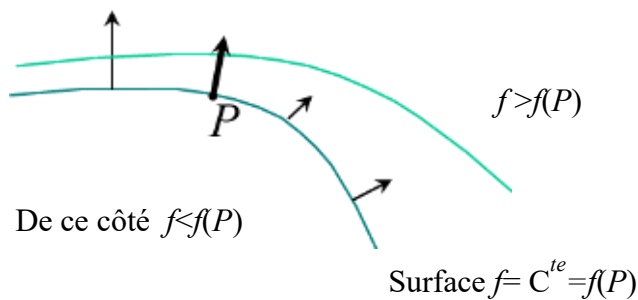
Surfaces équipotentielles

Pour donner une idée de la carte du champ f on trace les surfaces $f = C^{te}$ (isothermes, équipotentielles, etc.)

Le vecteur $\overrightarrow{\text{grad}} f$ est normal en P à la surface $f = C^{te}$ qui passe par P .

En effet en un point où $\overrightarrow{\text{grad}} f \neq 0$ on a:

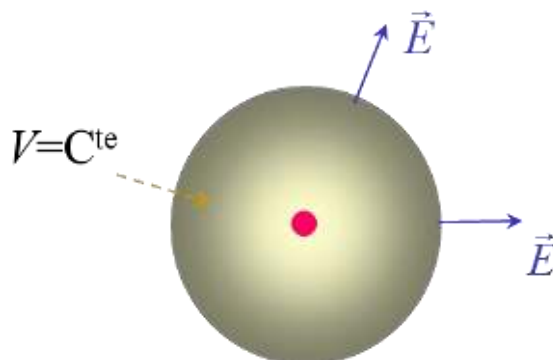
$$df = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{\text{grad}} f \cdot d\vec{P} = 0 \Leftrightarrow \text{vectoriellement } \overrightarrow{\text{grad}} f \perp d\vec{P}$$



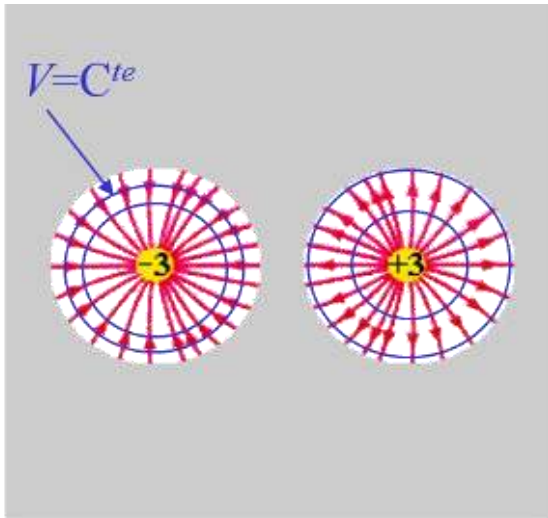
Les points de l'espace qui sont au même potentiel électrique forment une *surface équipotentielle*

Déplacer une charge sur cette surface ne nécessite aucun travail

En tout point de la surface le champ électrique est nécessairement perpendiculaire à la surface.



Surface équipotentielle d'une charge ponctuelle

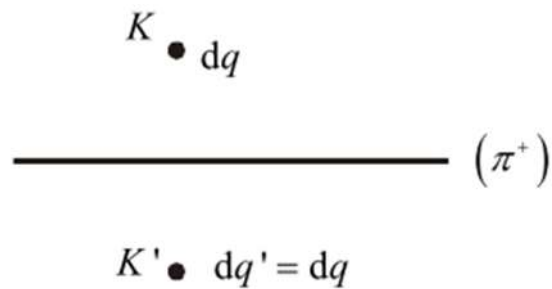


Surfaces équipotentielle près des charges ponctuelles d'un dipôle

1.6 Conséquences des symétries et invariances sur le champ électrostatique

Plan de symétrie

(π^+) est un plan de symétrie pour les charges si la distribution de charges D peut être décomposée en éléments K et K' deux à deux symétriques tels que $dp = dq'$.

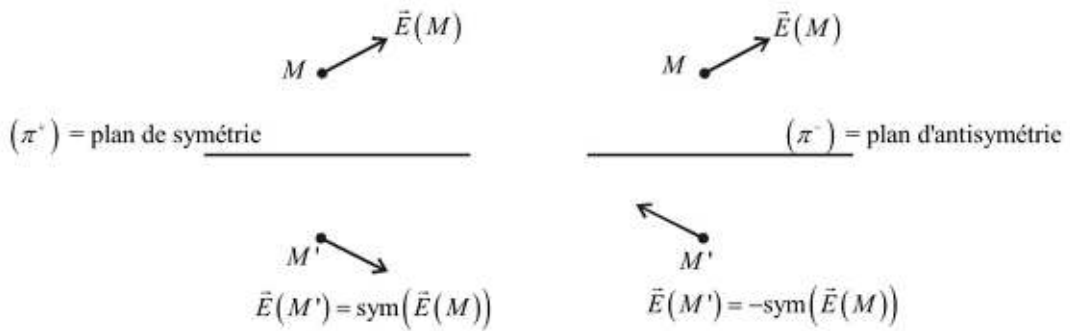


Plan d'antisymétrie

(π^-) est un plan d'antisymétrie pour les charges si la distribution de charges D peut être décomposée en éléments K et K' deux à deux symétriques tels que $dp = -dq'$.

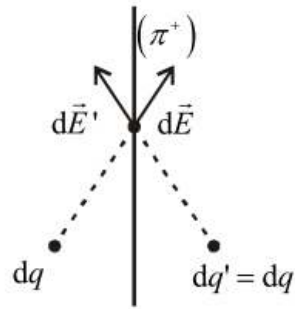
$$\begin{array}{c}
 K \bullet dq \\
 \hline
 (\pi^-) \\
 K' \bullet dq' = -dq
 \end{array}$$

Relation entre le champ en M et le champ en M'

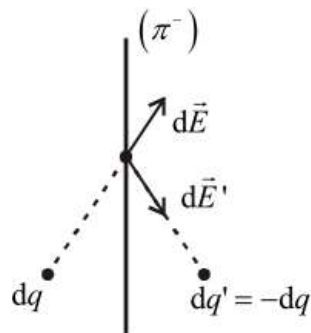


Il s'en suit les propriétés suivantes:

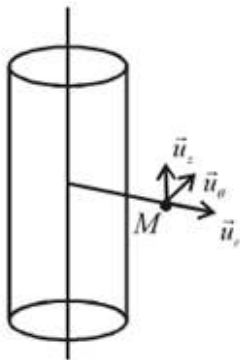
Si M appartient au plan de symétrie pour les charges, alors $\vec{E}(M)$ appartient au plan de symétrie.



Si M appartient au plan d'antisymétrie pour les charges, alors $\vec{E}(M)$ est orthogonal au plan d'antisymétrie.



Exemple: Un cylindre infini uniformément chargé



Invariance par rotation

Définition

Il y a **invariance** de la distribution par **rotation autour d'un axe \vec{u}_z** , si la distribution est **identique à elle-même par rotation** autour de cet axe.

En coordonnées cylindriques d'axe vertical \vec{u}_z , la distribution ne **dépend donc pas de θ** .

Définition

Il y a **invariance** de la distribution par **rotation autour d'un point O**, si la distribution est **identique à elle-même par une rotation quelconque** (angle et axe) autour de O.

En coordonnées **sphériques**, la distribution est alors indépendante de θ et de ϕ .

Propriété du champ

Le champ électrostatique créé par une distribution invariante par rotation possède **la même invariance**.

Invariance par translation

Définition

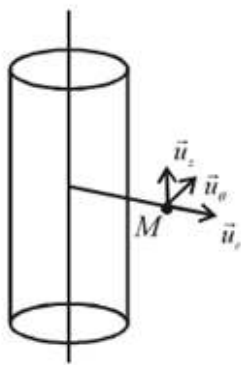
Il y a **invariance** de la distribution par **translation selon un axe \vec{u}_z** , si la **distribution ne dépend pas de la coordonnée z** suivant cet axe.

Les invariances par translation ne concernent que les distributions infinies.

Propriété du champ

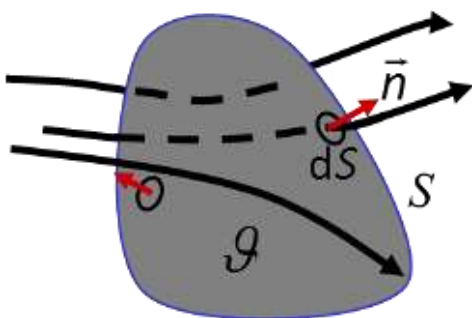
Le champ \vec{E} créé par une distribution invariante par translation possède la **même invariance**.

Exemple: Un cylindre infini uniformément chargé



1.7 Le flux d'un vecteur

Champ de vecteurs \vec{j}



On rappelle qu'une surface « finie » peut être découpée en une multitude de surfaces élémentaires. Chaque surface élémentaire est infiniment petite et peut être assimilée à son plan tangent. Par conséquent, toutes les surfaces élémentaires sont des plans.

Une surface élémentaire est dite orientée lorsque l'on choisit conventionnellement d'orienter son vecteur normal.

L'écriture suivante n'a de signification précise que si l'on a **au préalable orienté le vecteur \vec{n} sur un schéma** : $\vec{dS} = dS\vec{n}$ où dS est l'aire élémentaire.

Orienter une surface finie revient à orienter la surface en tout point : en un point M de la surface, on oriente le vecteur normal au plan tangent à la surface. *Il est évident que la convention d'orientation doit être la même en tout point de la surface !!*

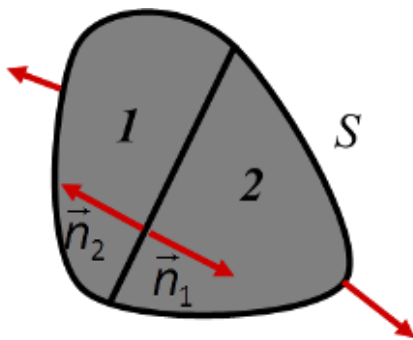
On rappelle qu'une surface fermée est une surface délimitant un volume. De telles surfaces sont ***toujours conventionnellement orientées vers l'extérieur.***

Flux d'un Champ de vecteurs

Le flux de \vec{j} à travers S ou sortant du volume est défini par :

$$\phi_V^S = \oiint_S \vec{j} \cdot \vec{n} \cdot dS$$

Additivité des flux



Partageons le volume ϑ en deux. Soit ϕ_1 , ϕ_2 et ϕ , les flux sortant respectivement du volume 1, du volume 2, et du volume $\vartheta = \vartheta_1 + \vartheta_2$

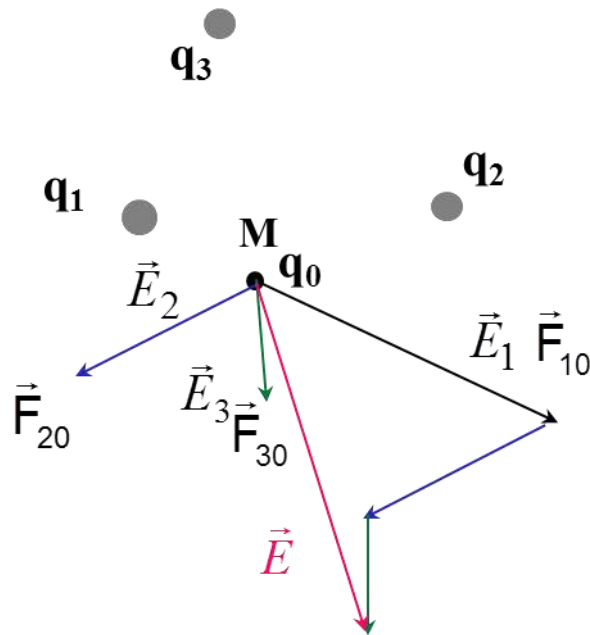
Les flux sortant respectivement de **1** et de **2** à travers la paroi commune, qui sont comptés dans ϕ_1 et ϕ_2 , sont opposés. Par conséquent nous pouvons écrire:

$$\boxed{\phi = \phi_1 + \phi_2}$$

L'additivité des flux est une propriété importante qui va nous servir pour la suite.

1.8 Flux de \vec{E} . Théorème de Gauss

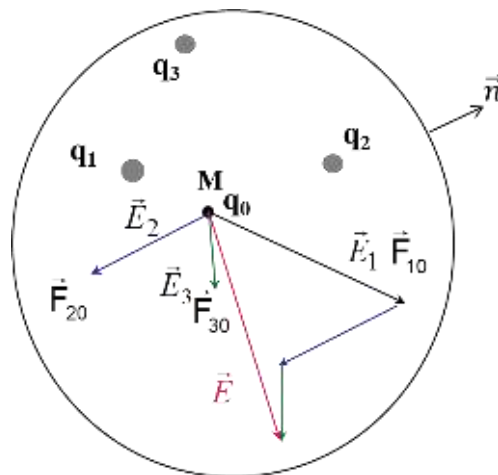
Reprenons l'expression du champ électrique $\vec{E}(P)$ d'une distribution de charges ponctuelles q_i aux points M_i .



En utilisant la formule de Coulomb et le principe de superposition on obtient :

$$\vec{E} = \sum_{i=1}^N \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_i}{r_i^2} \vec{u}_i$$

On souhaite calculer le flux, on va donc définir \$S\$ une surface fermée qui ne passe pas par aucun des points \$M_i\$ évitant ainsi les problèmes de singularité quand \$r_i \to 0\$:



Le flux \$\phi\$ du vecteur \$\vec{E}\$ à travers \$S\$ est alors bien déterminé:

$$\phi = \oiint_S \vec{E} \cdot \vec{n} \cdot dS = \oiint_S \sum_{i=1}^N \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_i}{r_i^2} \vec{u}_i \cdot \vec{n} \cdot dS = \sum_i \oiint_S \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_i}{r_i^2} \vec{u}_i \cdot \vec{n} \cdot dS$$

avec

$$\phi_i = \sum_i \oiint_S \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_i}{r_i^2} \vec{u}_i \cdot \vec{n} \cdot dS$$

Où $\vec{\phi}_i$ est le flux à travers S du champ \vec{E}_i correspondant à la seule charge q_i .

Flux d'une charge ponctuelle

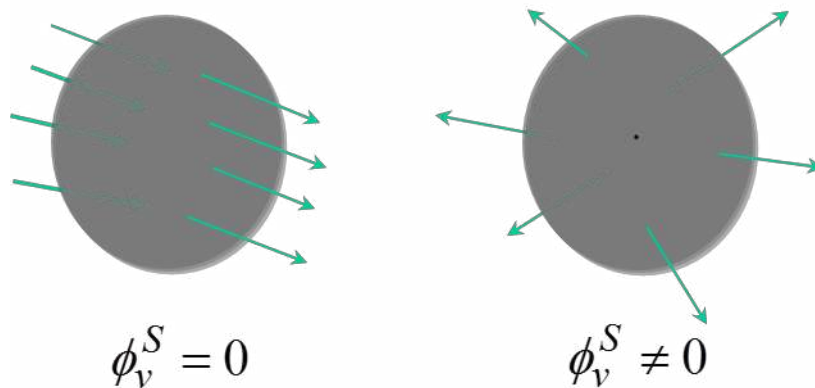
Dans le calcul de $\vec{\phi}_i$, on peut sortir le préfacteur constant de l'intégrale:

$$\phi_i = \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0} \oiint_S \frac{\vec{u}_i}{r_i^2} \cdot \vec{dS}$$

Le symbole \oiint est réservé à une surface fermée S orientée par convention de l'intérieur vers l'extérieur.

Maintenant nous avons à calculer le flux de $\frac{\vec{u}_i}{r_i^2}$ à travers une surface fermée S .

Nous admettrons les résultats, suivant que S entoure ou n'entoure pas l'origine O :



- Si S n'entoure pas l'origine O alors le flux de $\frac{\vec{u}_i}{r_i^2}$ est **nul**.
- Si S entoure l'origine O alors le flux de $\frac{\vec{u}_i}{r_i^2}$ est défini, sa valeur est indépendante de S et vaut 4π .

Le choix de la surface fermée S est donc très importante.

Théorème de Gauss

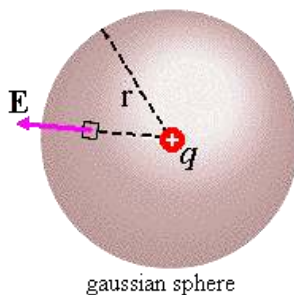
Il résulte finalement que le flux de \vec{E} à travers S ou sortant du volume ϑ limité par S est donné par le **Théorème de Gauss** :

$$\Phi_{\vartheta}^S = \oiint_S \vec{E} \cdot \vec{n} \cdot dS = \frac{1}{\epsilon_0} \left[\sum q_i \text{ intérieures à } S \right]$$

Méthode du théorème de Gauss

1. Repérer les **symétries (ou antisymétries) planes de la distribution de charge, source du champ**, pour déterminer la **direction du champ électrique** au point M. Ces plans doivent **contenir** le point M.
2. Repérer les **invariances de la distribution de charge, source du champ**, pour déterminer la **dépendance du champ** par rapport aux coordonnées du point M. Il faut **définir au préalable un système de coordonnées approprié** aux symétries de la distribution de charge.
3. Définir une « **surface de Gauss** », passant par le point M, et sur laquelle le champ électrique est uniforme (si possible).
4. Appliquer alors le **théorème de Gauss**. Grâce aux étapes précédentes, le calcul du flux (intégrale double) est **généralement très simple** si la distribution de charge est « hautement symétrique ».

Exemple d'application du théorème de Gauss dans le cas d'une charge ponctuelle:



L'opérateur divergence div

Soit \vec{j} un vecteur, le coefficient appelé « divergence de \vec{j} », est **un scalaire**:

$$div \vec{j} = \left(\frac{\partial j_x}{\partial x} + \frac{\partial j_y}{\partial y} + \frac{\partial j_z}{\partial z} \right)$$

En utilisant l'opérateur *nabla* $\vec{\nabla} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = \frac{\partial j_x}{\partial x} + \frac{\partial j_y}{\partial y} + \frac{\partial j_z}{\partial z}$

Théorème de la divergence (encore nommé Green-Ostrogradki)

Ce théorème est très utile en électrodynamique. Nous allons calculer le flux à travers un cube ***infinitésimal***:

Flux élémentaire qui sort de la surface $dydz$:

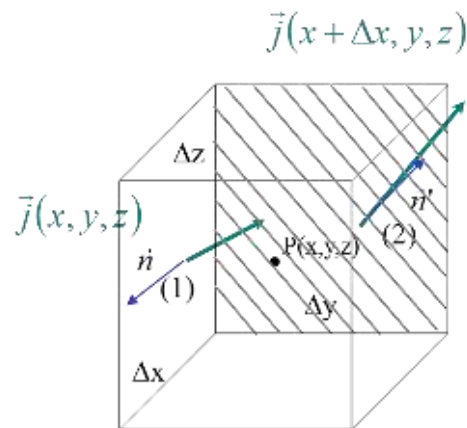
$$d\varphi = j(x + dx)dydz - j(x)dydz$$

Au premier ordre : $j(x + dx) = j(x) + \frac{\partial j}{\partial x} dx$

Il suffit de répéter l'opération pour les deux autres directions y et z :

$$d\varphi = \left(\frac{\partial j}{\partial x} + \frac{\partial j}{\partial y} + \frac{\partial j}{\partial z} \right) dx dy dz$$

$$(\Delta V = \Delta x \cdot \Delta y \cdot \Delta z)$$



Le flux $d\varphi$ d'un vecteur \vec{j} sortant d'un volume élémentaire dV autour d'un point P est proportionnel à dV :

$$d\phi = (\text{div } \vec{j}) dV$$

On retiendra le résultat essentiel : le flux à travers n'importe quelle surface fermée est nul si le champ est uniforme.

Le coefficient de proportionnalité est appelé "divergence de \vec{j} ", c'est un scalaire

$$\text{div } \vec{j} = \left(\frac{\partial j_x}{\partial x} + \frac{\partial j_y}{\partial y} + \frac{\partial j_z}{\partial z} \right)$$

Commentaires à propos des formules précédentes:

- 1 L'expression de div n'est simple qu'en coordonnées cartésiennes
- 2 Pour une justification du mot divergence voir le calcul de $\text{div}(-\vec{r})$
- 3 Le résultat est valable pour n'importe quel volume dV quel que soit sa forme

De l'additivité des flux il résulte que :

Théorème de la divergence (ou nommé Green-Ostrogradki) :

$$\oiint_S \vec{j} \cdot \vec{n} \cdot dS = \iiint_V (\text{div } \vec{j}) dV$$

Le flux de \vec{j} à travers S est égal à l'intégrale de $\text{div } \vec{j}$ définie dans tout le volume V intérieur à S .

Forme locale de la loi de Gauss

Dans le cas d'une distribution continue répartie en volume avec une densité de charge $\rho(x, y, z)$ on écrira que le flux sortant d'un volume quelconque V est:

$$\Phi = \frac{1}{\epsilon_0} \iiint_V \rho(x, y, z) dV$$

Pour un volume élémentaire dV qui contient la charge $\rho(x, y, z) dV$ on écrira, compte tenu de la définition de la divergence :

$$d\Phi = (\text{div } \vec{E}) dV = \frac{\rho dV}{\epsilon_0}$$

$$\boxed{\text{div } \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}}$$

(V étant quelconque)

Cette propriété du champ électrique est vraie quel que soit ρ

On pourra trouver l'opérateur divergence écrit avec le symbole *nabla* $\vec{\nabla} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix}$

Ce qui permet de réécrire $\text{div } \vec{E}$ sous la forme

$$\text{div } \vec{E} = \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

qui se lit « *nabla scalaire E* » avec $\vec{E} \begin{cases} E_x \\ E_y \\ E_z \end{cases}$

soit :

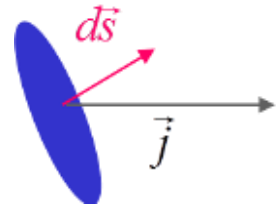
$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}$$

C'est le théorème de Gauss sous forme locale, qui permet de calculer ρ point par point en fonction des dérivées partielles des fonctions E_x, E_y, E_z de x, y, z .

Loi de conservation de la charge

Pour illustrer le *théorème de la divergence* d'une autre façon prenons l'exemple du flux du vecteur densité de courant.

Dans le cas général d'une distribution de charge **quelconque** $\rho(\vec{r})$ animée d'une vitesse **moyenne** $\vec{v}(\vec{r})$, la charge passant, par *unité de temps* et par **unité de surface**, à travers une surface **infinitésimale**, ds , vaut :



$$\rho(\vec{r})\vec{v}(\vec{r}) \cdot \vec{dS} = \vec{j} \cdot \vec{dS}$$

Où $\vec{j} \stackrel{\text{def}}{=} \rho(\vec{r})\vec{v}(\vec{r})$ = « densité de courant » électrique

\vec{j} a les dimensions d'un courant par unité de surface:

$$[j] = \text{C} \cdot \text{m}^{-3} \cdot \text{m/s} = \text{C/s/m}^2 = \text{A/m}^2$$

Le flux de \vec{j} à travers toute surface **fermée** S = variation de la quantité de charge à l'intérieur du volume défini par S :

$$\oiint_S \vec{j} \cdot \vec{dS} = -\frac{dQ}{dt}$$

D'après le théorème de la divergence on a le membre de gauche qui devient

$$\oiint_S \vec{j} \cdot \vec{dS} = \iiint_V (\text{div } \vec{j}) dV$$

Et le membre de droite qui n'est autre que :

$$-\frac{d}{dt} \iiint_V \rho \cdot dV$$

A la limite en rendant S infinitésimale on obtient la loi de conservation **locale**:

$$(\text{div } \vec{j}) dV = -\frac{d}{dt}(\rho \cdot dV)$$

$$\boxed{\text{div } \vec{j} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}}$$

Flux du vecteur densité de courant: application à la loi des nœuds

En régime **statique**, ρ ou Q , sont indépendants du temps

Pour des courants électriques continus :

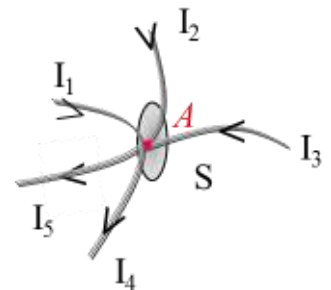
$$\text{div } \vec{j} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} \equiv 0$$

$$\Rightarrow \oiint_S \vec{j} \cdot \vec{dS} = \text{courant total à travers } S = 0$$

Si on trace autour du nœud A une surface fermée, le « flux sortant » du vecteur \vec{j} à travers cette surface est nul en régime permanent: c'est-à-dire qu'il n'y a pas d'accumulation de charges dans la région de A .

Il arrive en A $I_3 + I_2 + I_1$ coulombs par seconde par les branches 1, 2, et 3, et il en repart $I_4 + I_5$

Il faut donc que : $I_3 + I_2 + I_1 = I_4 + I_5$



$$\boxed{\Rightarrow \sum_i I_i = 0}$$

1.9 Exercices

Exercice 1 : Théorème de Gauss

Calculer le champ électrique en tout point de l'espace produit par une ligne infinie uniformément chargée

Exercice 2 : Théorème de la divergence et surface de Gauss

Que vaut, suivant le cas de figure, le flux de $\frac{\vec{u}}{r^2}$ à travers une surface fermée \mathcal{S} ?

Examiner les cas selon que \mathcal{S} entoure ou n'entoure pas l'origine O

Utiliser le théorème de la divergence

Exercice 3 : Application du théorème de Gauss

Calculer la discontinuité du champ électrique au passage d'une surface chargée positivement .¹

Exercice 4 : Théorème de Gauss

A l'aide du théorème de la divergence et du théorème de Gauss, montrer que le champ électrique produit par un plan infini uniformément chargé, d'épaisseur a s'écrit :

$$E(x) = -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0} + \frac{\rho x}{\varepsilon_0}$$

Exercice 5 : Modèle de l'atome de Thomson.

Un atome de lithium ($Z=3$) est constitué de 3 électrons, considérés comme des charges ponctuelles, et d'un noyau, dont la charge positive, d'après ce modèle, est uniformément répartie dans une sphère de rayon R (1.5 \AA) qui est donc le rayon de l'atome.

Soit \vec{E} le champ du noyau ; il est radial et son intensité à l'intérieur de la sphère, est celle d'une distribution homogène de symétrie sphérique. $\|\vec{E}\|$ est une fonction de r donnée par

¹ Cet exercice donne lieu à un commentaire approfondi sur une propriété fondamentale du champ électrique.

$$E(r) = \frac{3e}{4\pi\epsilon_0 R^3} r$$

qu'on écrira $E = kr$ avec $k = \frac{3e}{4\pi\epsilon_0 R^3}$

On place les 3 électrons aux sommets d'un triangle équilatéral de côté d .

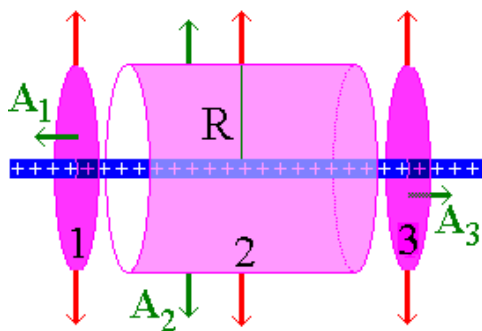
Montrer que leur distance au centre du noyau est égale à $\frac{R}{\sqrt{3}}$

Correction des exercices

Correction exercice 1

Par symétrie le fil est invariant par réflexion dans un plan \perp donc \vec{E} est dans ce plan. D'autre part la distribution est invariante par toute opération de symétrie dans un plan passant par le fil. Donc la seule possibilité est que le champ soit radial. Il est porté par une direction perpendiculaire au fil, de vecteur unitaire \vec{u}_R ; sa magnitude est calculée à l'aide du *théorème de Gauss* :

Pour cela imaginons une surface de Gauss en forme de boîte cylindrique de longueur h parallèle au fil et dont les deux extrémités sont fermées et perpendiculaires au fil.



La charge totale emmagasinée est λh . Le flux sortant aux deux extrémités est nul car \vec{E} est \perp à la surface \vec{A}_1 et \vec{A}_3 . Le flux sortant par la face cylindrique est $2\pi \times R \times h \times E$

Le théorème de Gauss conduit à :

$$2\pi \times R \times h \times E = \frac{\lambda h}{\epsilon_0}$$

Ce qui donne au final :

$$\vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 R} \vec{u}_R$$

Correction exercice 2

a) Cas où S n'entoure pas le point origine où se trouve la charge. On va montrer que $\text{div} \frac{\vec{u}}{r^2} = 0$

On sait que le vecteur $\frac{\vec{u}}{r^2}$ a pour coordonnées :

$$\begin{pmatrix} \frac{x}{r^3} \\ \frac{y}{r^3} \\ \frac{z}{r^3} \end{pmatrix}$$

Avec $r = \sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)}$ on a : $r^3 = (x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}$

Il vient :

$$\operatorname{div} \frac{\vec{u}}{r^2} = \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{x}{r^3} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{y}{r^3} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{z}{r^3} \right)$$

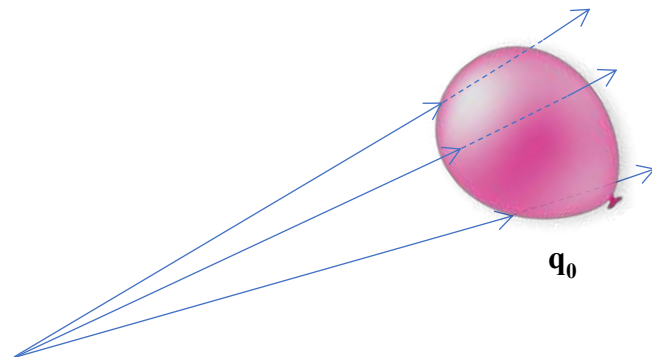
Calculons la dérivée et explicitons son numérateur :²

$$\begin{aligned} \text{numérateur de } \operatorname{div} \frac{\vec{u}}{r^2} &= (x^2 + y^2 + z^2)^{3/2} - 3x^2(x^2 + y^2 + z^2)^{1/2} \\ &+ (x^2 + y^2 + z^2)^{3/2} - 3y^2(x^2 + y^2 + z^2)^{1/2} \\ &+ (x^2 + y^2 + z^2)^{3/2} - 3z^2(x^2 + y^2 + z^2)^{1/2} \end{aligned}$$

Après regroupement on a finalement:

$$\operatorname{div} \frac{\vec{u}}{r^2} = \frac{3(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2} - 3(x^2 + y^2 + z^2)^{1/2} \cdot (x^2 + y^2 + z^2)}{(x^2 + y^2 + z^2)^3} = 0$$

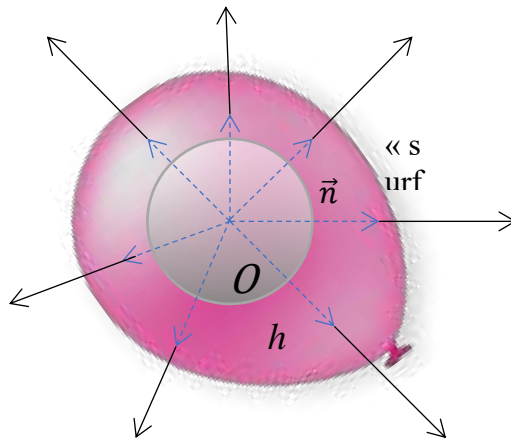
² La taille des caractères est intentionnellement augmentée pour montrer les regroupements d'expressions algébriques



Donc si \mathcal{S} n'entoure pas l'origine O alors le flux de $\frac{\vec{u}}{r^2}$ est nul

b) Cas où la charge est à l'intérieur :

On trace une sphère Σ centrée sur O , et de rayon R qui soit toute entière à l'intérieur de \mathcal{S} .



Le volume \mathcal{V} limité par \mathcal{S} se trouve partagé par Σ en deux volumes 1 et 2.

Volume \mathcal{V}_1 intérieur à la surface sphérique Σ à travers laquelle le flux est ϕ_1

Volume \mathcal{V}_2 compris entre Σ et \mathcal{S} s'appuyant sur une surface à travers laquelle le flux est ϕ_2 .

On peut écrire d'après l'additivité des flux :

le flux total de $\frac{\vec{u}}{r^2}$ à travers la surface fermée \mathcal{S} , est : $\phi = \phi_1 + \phi_2$

On peut dire que $\phi_2 = 0$ (théorème de la divergence appliqué au volume compris entre Σ et \mathcal{S} qui ne contient aucune charge)

Reste à traiter le cas de ϕ_1 flux de $\frac{\vec{u}}{r^2}$ à travers Σ .

Calculons le flux à partir de sa définition mathématique en exprimant l'élément différentiel \vec{dS} en coordonnées sphériques r, θ, φ :

$$\Phi_{1,\vartheta}^{\mathcal{S}} = \oiint_{\Sigma} \frac{\vec{u}}{r^2} \cdot \vec{dS} = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \frac{1}{r^2} \cdot r^2 \cdot \sin \theta \cdot d\theta \cdot d\varphi$$

$$\varphi \in [0, 2\pi]$$

$$\theta \in [0, \pi]$$

Après intégration on a : $\Phi_{1,\vartheta}^{\mathcal{S}} = 2\pi \times [-\cos \theta]_0^{\pi} = (-2\pi)(-2) = 4\pi$

Donc le flux total de $\frac{\vec{u}}{r^2}$ à travers la surface fermée S vaut 4π

Q.E.D

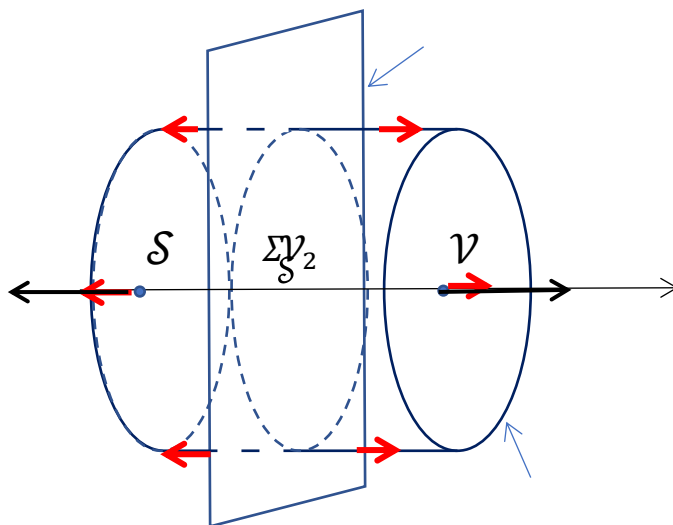
Correction exercice 3

Au voisinage d'une surface l'observateur voit un plan infini uniformément chargé avec une densité superficielle σ , positive. Cette distribution est invariante dans toute translation parallèle au plan. On en conclut que $\vec{E}(P)$ reste constant lorsqu'on se déplace parallèlement au plan chargé.

D'autre part toute normale au plan est un axe de symétrie. Si P' est l'image du point P , il en résulte que $\vec{E}(P)$ est dirigé suivant $P'P$ et on a vectoriellement $\vec{E}(P') = -\vec{E}(P)$ et dans ce repère le vecteur \vec{n} est orienté à gauche, donc

$$\vec{n}' = -\vec{n}$$

Prenons un axe Ox normal au plan ; les lignes de champ sont toutes parallèles à Ox et s'éloignent du plan de part et d'autre ($\sigma > 0$)



Dessignons une surface de Gauss fermée constituée par un cylindre parallèle à Ox , donc un tube de force, limité en P et P' par deux sections droites de même aire S . la charge totale intérieure est bien définie et vaut σS ; le flux est donc bien défini. Le flux à travers la paroi latérale est nul, puisque \vec{E} est partout tangent, donc $\vec{E} \cdot \vec{n} = 0$.

Le flux ne sort donc qu'aux deux faces, où \vec{E} est normal et uniforme. Le module de \vec{E} est tel que $\phi = \phi_{gauche} + \phi_{droite}$ avec :

$$\phi_{droite} = \vec{E}(P) \cdot S \vec{n} = E \cdot S$$

$$\phi_{gauche} = \vec{E}(P') \cdot S \vec{n}' = -\vec{E} \cdot (-S) = E \cdot S$$

Donc le flux a pour expression :

$$\boxed{\phi = \phi_{gauche} + \phi_{droite} = 2 \times E \cdot S}$$

Par ailleurs le théorème de Gauss donne :

$$\Phi_{\mathcal{S}}^S = \frac{1}{\epsilon_0} \left[\sum q_i \text{ intérieures à } \mathcal{S} \right]$$

Ici la somme des charges intérieures à \mathcal{S} est égal à la densité surfacique de charge σ multipliée par la surface S découpée par la boîte de Gauss (« pill-box ») :

$$\Phi_{\mathcal{S}}^S = \frac{1}{\epsilon_0} [\sigma S]$$

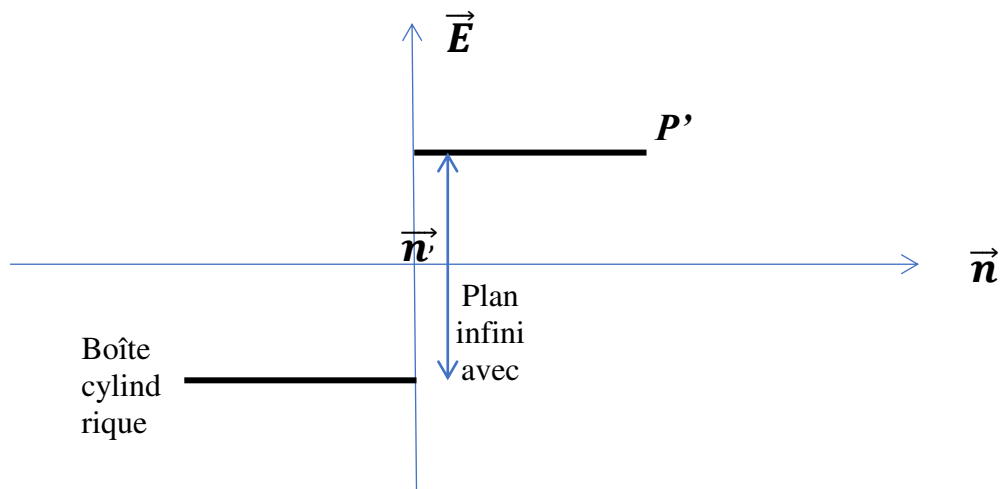
Par suite : $2 \times E \cdot S = \frac{1}{\epsilon_0} [\sigma S]$; d'où :

$$\boxed{E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}}$$

Demandons nous quelle est la signification physique d'un tel résultat ?

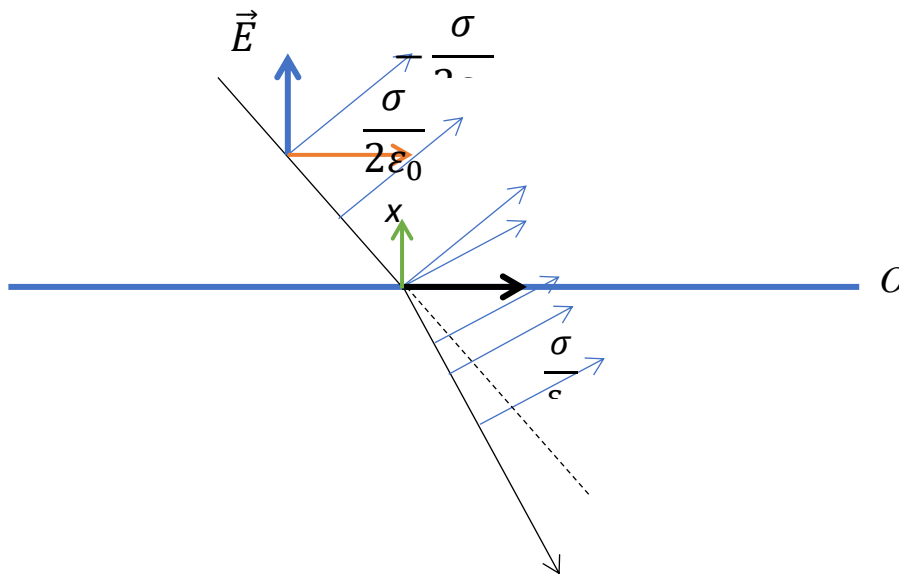
Du point de vue des lois de l'électrostatique, près d'une surface un champ électrique \vec{E} qui serait normal à cette surface subit une discontinuité égale à :

$$\frac{\sigma}{2\epsilon_0} - \left(-\frac{\sigma}{2\epsilon_0} \right) = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$



Commentaire sur une propriété fondamentale du champ électrique :

Imaginons maintenant un vecteur \vec{E} quelconque, que l'on peut toujours écrire comme la somme vectorielle d'une composante \vec{E}_\perp perpendiculaire à la surface, et d'une composante \vec{E}_\parallel parallèle à cette surface, ayant la propriété de se déplacer en glissant jusqu'à ce qu'il rencontre une surface σ^- , comme sur la figure ci-dessous :



Que se passe-t-il lorsque le champ électrique « traverse » la surface ? Nous admettrons sans le démontrer que la composante parallèle \vec{E}_\parallel est inchangée. A partir des résultats précédents nous pouvons dire que la composante perpendiculaire subit une discontinuité telle que :

$$\vec{E}_\perp^{(avant)} - \vec{E}_\perp^{(après)} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{n}$$

Cela signifie que le nouveau vecteur champ électrique \vec{E}' voit sa nouvelle composante perpendiculaire $\vec{E}'_\perp = \vec{E}_\perp$ diminuer en module de la quantité $\frac{\sigma}{\epsilon_0}$

comme indiqué sur la figure. Donc si on reconstruit le nouveau vecteur $\vec{E}' = \vec{E}'_\perp + \vec{E}'_\parallel$ on voit que son module est plus petit et qu'il ne fait plus le même angle avec la surface σ^- . Pour mieux visualiser les choses traçons une ligne droite comme une sorte de « guide pour l'œil »³.

³ Cette droite ne sert pas seulement de guide pour l'œil mais elle est aussi physiquement rattachée à la notion de propagation comme on le verra dans la suite du cours

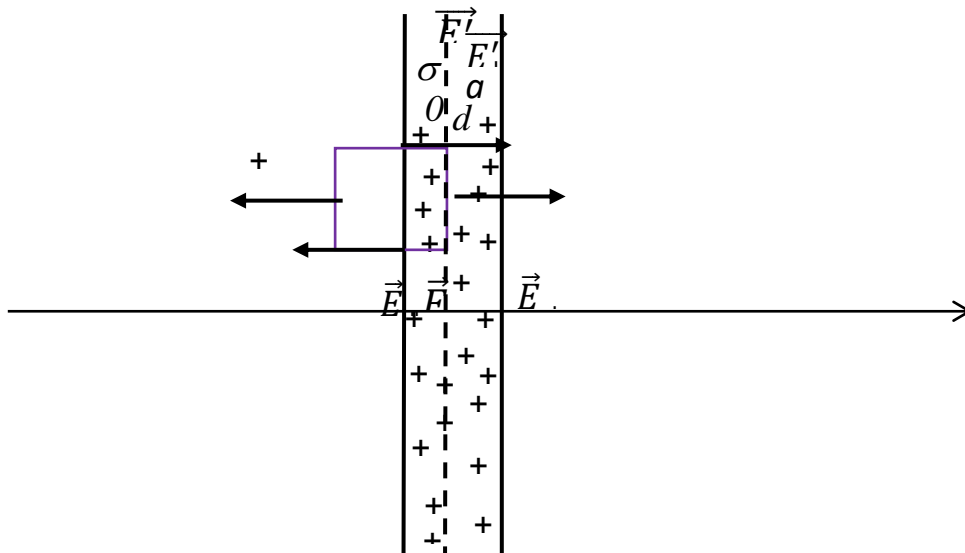
Construisons ce segment imaginaire de façon à ce qu'il soit toujours perpendiculaire au vecteur champ électrique \vec{E} . Nous pouvons voir que cette droite change de pente à la traversée d'un milieu contenant des charges superficielles.

Ce résultat ne vous fait-il pas penser à l'expérience de la réfraction d'un rayon lumineux ?

Il y a bien-sûr un lien, que nous avons démontré à partir du théorème de Gauss et des propriétés du champ électrique.

Correction Exercice 4

Représentation vue en coupe du plan chargé d'épaisseur a



Appliquons le théorème de Gauss à l'élément infinitésimal de champ \vec{dE} produit par l'élément de plan d'épaisseur dx :

$$d^2 \Phi_g^s = \vec{dE} \cdot \vec{dS} = \frac{1}{\epsilon_0} \rho(x) dx dS$$

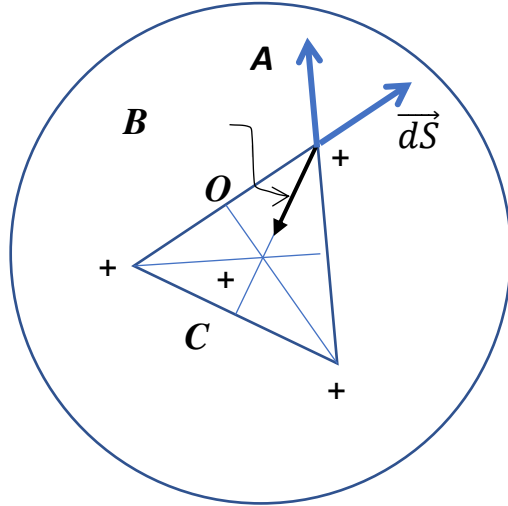
On a : $\int_0^x dE(x) = \frac{1}{\epsilon_0} \int_0^x \rho(x) dx$ et comme ρ est constant :

$$E(x) - E(0) = \frac{\rho}{\epsilon_0} x$$

On a montré précédemment que $E(0) = \frac{-\sigma}{2\epsilon_0}$ donc :

$$E(x) = \frac{-\sigma}{2\epsilon_0} + \frac{\rho}{\epsilon_0} x$$

Correction exercice 5



Chacun des trois électrons (ponctuels)⁴ est attiré vers le centre du noyau avec une force $(-e)\vec{E}$ qui serait une position d'équilibre ($\vec{E} = 0$) s'il n'y avait la répulsion mutuelle des 3 électrons qui les empêche de s'agglutiner au centre. Ecrivons que les 3 électrons sont en équilibre électrostatique en **ABC**.

L'électron en **A** est soumis à des forces de répulsion de la part des deux autres électrons, et aussi à une force d'attraction de la part du noyau.

On peut écrire vectoriellement à l'équilibre :

$$(-e)\vec{E} + (\vec{f}_{CA} + \vec{f}_{BA}) = 0$$

Les forces \vec{f}_{CA} et \vec{f}_{BA} sont connues : il s'agit de forces Coulombiennes.

Quant au champ électrique \vec{E} créé par une distribution sphérique homogène, il est radial et son intensité est une fonction de r ; $E(r)$ possède une symétrie sphérique. Ce champ \vec{E} est de la forme (cf. énoncé) : $\vec{E} = (kr)\vec{u}_R = k\vec{OA}$ avec $\|\vec{OA}\| = r$

En utilisant la loi de Coulomb pour les forces répulsives, et la formule donnée pour l'expression du champ électrique on a :

$$\boxed{(-e)k\vec{OA} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} e^2 \frac{1}{d^2} (\vec{u}_{CA} + \vec{u}_{BA}) = 0}$$

Où \vec{u}_{BA} , \vec{u}_{CA} et \vec{u}_R sont des vecteurs unitaires.

Par projection des forces on a : (l'angle entre \vec{u}_{CA} et la direction correspondant au vecteur \vec{OA} fait 30°)

$$\boxed{eE = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{d^2} \sqrt{3}}$$

⁴ La dimension de l'électron est sans fondement en physique quantique. Lorsqu'on parle du « rayon classique » on prend 10^{-15}m

Relation entre d et r dans le triangle équilatéral **ABC** :

Dans le triangle COH il est facile de voir que $CH = CO \cos 30^\circ$, soit :

$$\frac{d}{2} = r \cos 30^\circ = \frac{r\sqrt{3}}{2}$$

$$d = r\sqrt{3}$$

En remplaçant d et $E(r)$ dans la formule trouvée plus haut on obtient r pour lequel il y a équilibre, soit l'égalité suivante :

$$\frac{3e^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{r}{R^3} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{\sqrt{3}}{d^2}$$

Ce qui conduit à après simplification :

$$\frac{\sqrt{3}}{3d^2} R^3 = r$$

D'où :

$$\frac{\sqrt{3}}{3(r\sqrt{3})^2} R^3 = r$$

On trouve finalement :

$$r^3 = \frac{R^3}{3\sqrt{3}}$$

Soit en remarquant que $3\sqrt{3} = (\sqrt{3})^3$:

$$\boxed{r = \frac{R}{\sqrt{3}}}$$

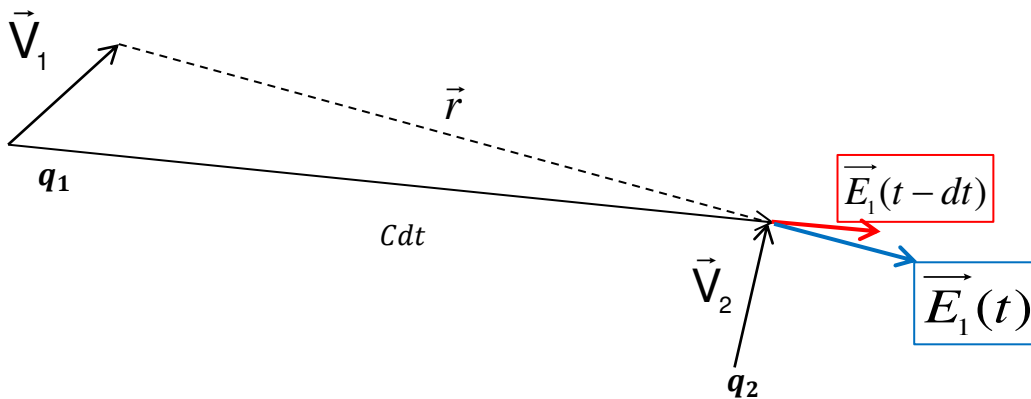
Ce résultat montre effectivement que les électrons sont à l'intérieur du noyau.⁵

⁵ Cette conclusion n'a de sens que dans la limite de ce modèle (1897) bien évidemment. Cette construction n'a pas résisté aux expériences de Rutherford (1911) qui à l'aide de particules α (7500 fois plus lourdes qu'un électron), a montré que les trajectoires déviées par le noyau n'étaient pas compatibles avec l'idée d'un noyau étendu. Rutherford a plaidé en faveur d'un noyau ponctuel $+Ze$ dont le champ peut être très fort et dont la masse peut être comparable à celle des particules α (penser au choc de boules de billard).

Chapitre 2 : Magnétostatique

2.1 Introduction

Soient deux particules q_1 et q_2 situées à un instant t aux points M_1 et M_2 . En l'absence de mouvement, la particule q_1 crée au point M_2 un champ électrostatique $\vec{E}_1(M_2)$ et la particule q_2 subit une force dont l'expression est donnée par la loi de Coulomb



Dans un référentiel fixe, q_1 est animée d'une vitesse \vec{v}_1 . Quelle serait alors l'action de q_1 sur une particule q_2 animée d'une vitesse \vec{v}_2 ?

Soit dt le temps qu'il faut à l'information (le champ électrostatique créé par q_1) pour se propager de q_1 vers q_2 . Pendant ce temps, q_1 parcourt une distance $v_1 dt$ et q_2 parcourt la distance $v_2 dt$. Autrement dit, lorsque q_2 ressent les effets électrostatiques dus à q_1 , ceux-ci ne sont plus radiaux : le champ $\vec{E}_1(t-dt)$ « ressenti » par q_2 est dirigé vers l'ancienne position de q_1 et dépend de la distance Cdt et non pas de la distance r .

Pour tenir compte de l'effet du mouvement sur le comportement des charges en présence d'un champ électrique, un nouveau champ a été introduit. Pour le différencier du champ électrique on lui a donné le nom de *champ magnétique*.

Dans cette seconde partie du cours nous étudierons les propriétés de ce champ magnétique dans des conditions où il ne dépend pas explicitement du facteur temps t , d'où le titre de *magnétostatique* ; l'adjectif statique ne s'appliquant pas aux charges elles-mêmes puisqu'elles sont ici en mouvement.

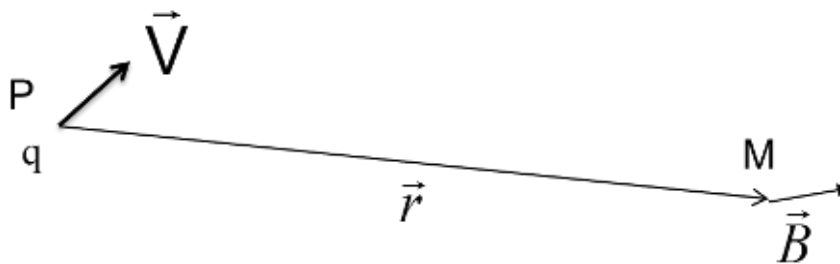
Nous verrons que les sources de ce champ sont soit les courants électriques, soit la matière aimantée (magnétite⁶).

⁶ La magnétite est un minéral ferromagnétique. Cet oxyde de fer peut être trouvé naturellement sous forme de cristaux au sein de roches éruptives (et donc magmatiques) ou métamorphiques. Elle a été utilisée en Chine dans la fabrication de boussoles dès le IV^e siècle avant J.-C. Elle permet en effet d'orienter vers le nord les aiguilles sur lesquelles elle est attachée

Champ magnétique créé par une charge en mouvement

Le champ magnétique créé en un point M par une particule de charge q située en un point P et animée d'une vitesse \vec{v} est :

$$\vec{B}(x, y, z) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q \vec{v} \wedge \vec{r}}{\|\vec{r}\|^3}$$



L'unité du champ magnétique dans le système international est le **Tesla (T)**. Une autre unité appartenant au système CGS, le **Gauss (G)**, est également très souvent utilisée :

1 Gauss = 10^{-4} Tesla.

Le facteur μ_0 est la **perméabilité du vide** : il décrit la capacité du vide à «laisser passer» le champ magnétique. Sa valeur dans le système d'unités international MKSA est

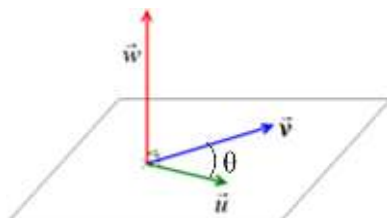
$$4\pi 10^{-7} \text{ H.m}^{-1}$$

Rappel sur le produit vectoriel

$$\|\vec{u} \wedge \vec{v}\| = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \sin \theta$$

$$\text{Si } \vec{w} = \vec{u} \wedge \vec{v} \text{ et } \theta = \text{angle}(\vec{u}, \vec{v})$$

$$\vec{w} \perp \text{plan } \vec{u}, \vec{v}$$



Attention le produit vectoriel est orienté :

mais

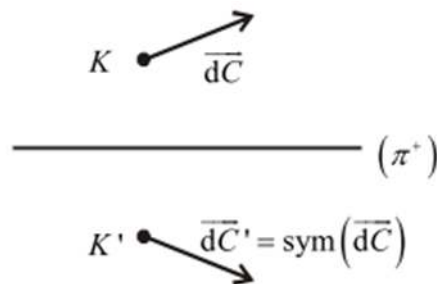
$$\vec{u} \wedge \vec{v} \neq \vec{v} \wedge \vec{u}$$

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = -[\vec{v} \wedge \vec{u}]$$

2.2 Conséquences des symétries et invariances

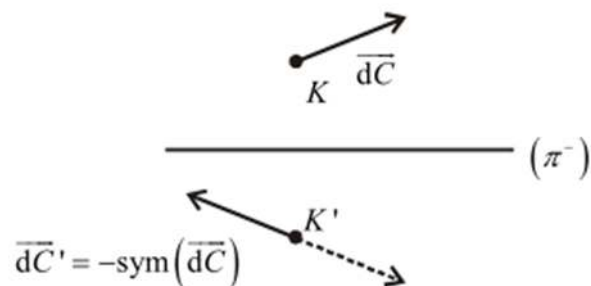
Plan de symétrie

(π^+) est un plan de symétrie pour les courants si la distribution de courants D peut être décomposée en éléments K et K' deux à deux symétriques tels que $\vec{dC}' = \text{sym}(\vec{dC})$. L'élément de courant vaut $\vec{dC} = Id\vec{l}$.

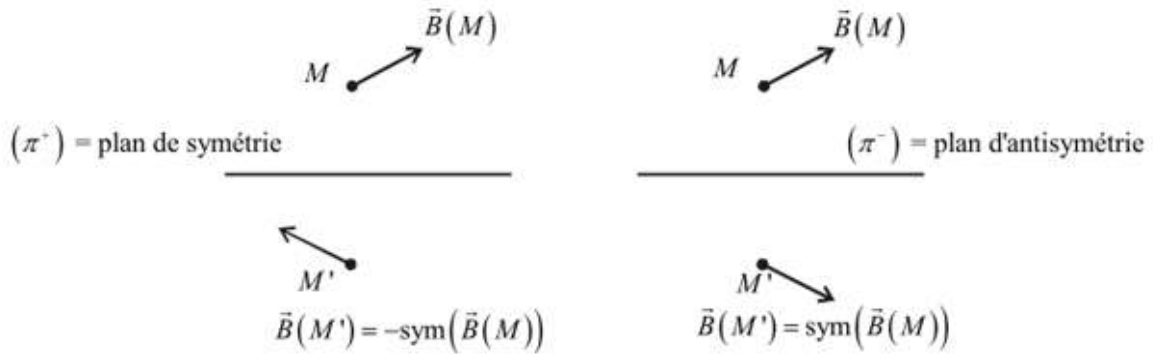


Plan d'antisymétrie

(π^-) est un plan d'antisymétrie pour les courants si la distribution de courants D peut être décomposée en éléments K et K' deux à deux symétriques tels que $\vec{dC}' = -\text{sym}(\vec{dC})$.



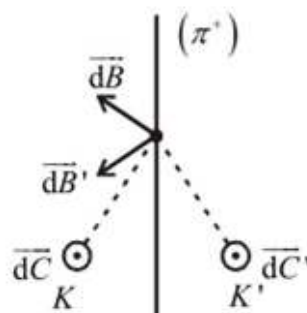
Relation entre le champ en M et le champ en M'



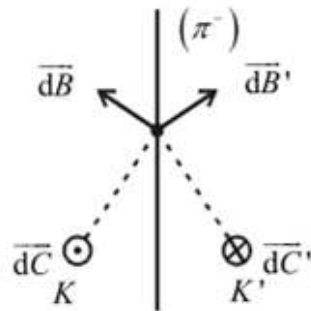
Remarque : \vec{B} est défini à partir d'un produit vectoriel. C'est donc un pseudo-vecteur ou vecteur axial. Les plans de symétrie pour les sources sont donc des plans d'antisymétrie pour \vec{B} .

Il s'en suit les propriétés suivantes:

Si M appartient au plan de symétrie pour les courants, alors $\vec{B}(M)$ est orthogonal au plan de symétrie.



Si M appartient au plan d'antisymétrie pour les courants, alors $\vec{B}(M)$ appartient au plan d'antisymétrie.



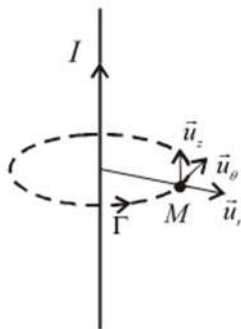
Invariances

Une distribution de courant peut être **invariante** par **translation** selon un axe, ou par **rotation** autour d'un axe.

Propriété du champ

Le champ \vec{B} créé par une distribution invariante par translation ou rotation possède la **même invariance**.

Exemple: Un cylindre infini uniformément chargé



2.3 Champ magnétique créée par un courant– Biot et Savart

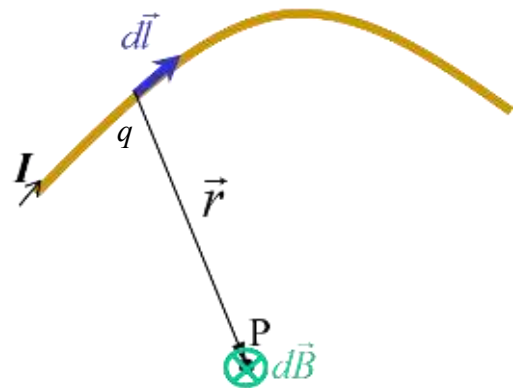
A partir de l'expression du champ créée par un ensemble de charges dq animées d'une vitesse moyenne v on peut réécrire la relation précédente sous forme:

$$d\vec{B}(x, y, z) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{dq \vec{v} \wedge \vec{r}}{\|\vec{r}\|^3}$$

$$\vec{v} = \frac{d\vec{l}}{dt}$$

$$d\vec{B}(x, y, z) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{dq}{dt} \frac{d\vec{l} \wedge \vec{r}}{\|\vec{r}\|^3}$$

$$d\vec{B}(x, y, z) = \frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{d\vec{l} \wedge \vec{r}}{\|\vec{r}\|^3}$$



On travaillera plus souvent avec l'expression locale de la loi de Biot et Savart du champ magnétique élémentaire produit par un élément infinitésimal de courant:⁷

$$\boxed{d\vec{B} = \frac{\mu_0 I d\vec{l} \wedge \vec{r}}{4\pi r^3}}$$

μ_0 = perméabilité magnétique du vide = $1.256 \cdot 10^{-6}$ H/m

Pour connaître le champ magnétique total il suffira d'intégrer sur la distribution de courant et on obtient la formule connue sous le nom de **loi de Biot et Savart** :

$$\vec{B} = \oint_{\text{circuit}} \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{d\vec{l} \wedge \vec{r}}{r^3}$$

Remarques:

Le champ magnétique élémentaire diminue en $1/r^2$

Le champ magnétique obéit au principe de superposition.

Rappel de l'expression du champ électrique élémentaire produit par une charge dq :

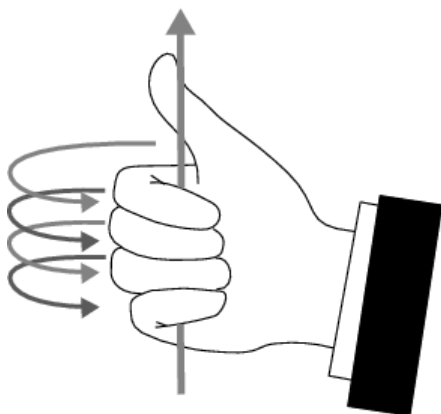
$$d\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{r^2} \vec{u}_r$$

⁷ le terme en r^3 au dénominateur provient de la normalisation du vecteur unitaire $\vec{u} = \frac{\vec{r}}{r}$ porté par la direction QP.

On a bien $\|\vec{QP}\| = r$ et une loi en $\frac{1}{r^2}$

La loi de Biot Savart apparaît comme l'équivalent magnétique de la loi de Coulomb à la différence près qu'en régime stationnaire un élément infinitésimal de courant ne peut exister seul sans violer la conservation de la charge.

Sens du champ magnétique créé par un circuit parcouru par un courant



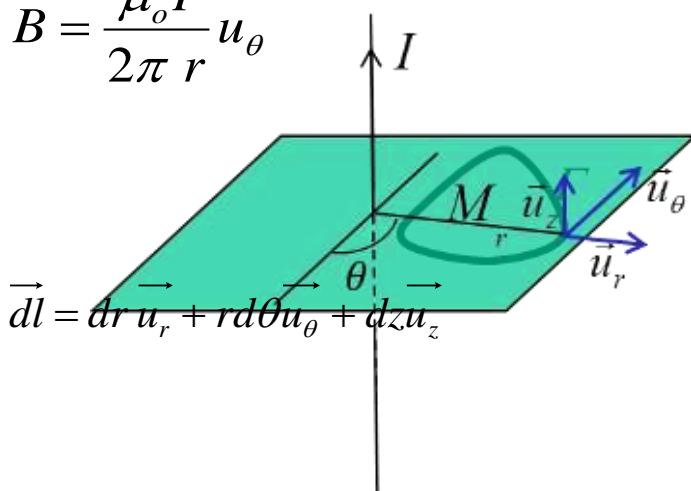
Règle des doigts de la main droite: Quand le pouce de la main droite se dirige dans la direction du courant conventionnel, les doigts se courbent autour du fil dans la direction du champ magnétique.

2.4 Propriétés du champ magnétique : circulation et théorème d'Ampère

Une propriété importante du champ magnétique, découverte par Ampère et démontrée à partir de Biot et Savart pour un cas particulier, concerne la circulation du vecteur \vec{B} le long d'une courbe fermée.

Nous pouvons démontrer à l'aide de la loi de Biot et Savart et nous l'admettrons ici ⁽⁸⁾ que le champ \vec{B} créé par un fil infini en un point $M(r,\theta,z)$ s'écrit:

$$\vec{B} = \frac{\mu_o I}{2\pi r} \vec{u}_\theta$$



$$d\vec{l} = dr \vec{u}_r + r d\theta \vec{u}_\theta + dz \vec{u}_z$$

Un déplacement élémentaire le long de cette courbe s'écrit:

La circulation de \vec{B} sur la courbe fermée Γ vaut alors:

$$\oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_o \cdot I \oint_{\Gamma} \frac{d\theta}{2\pi}$$

$$\oint_{\Gamma} \frac{d\theta}{2\pi} = 0$$


Si la courbe *fermée* quelconque n'enlace pas le fil:

⁸ cf. exercice 2.6.1 de ce polycopié

Si la courbe *fermée* enlace le fil $\oint_{\Gamma} d\theta = 2\pi$

donc: $\oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_o \cdot I$

Théorème d'Ampère : généralisé à partir de l'expérience du fil infini en régime statique (i.e. $\vec{j}(M)$ ou I indépendant du temps) :



$$\oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_o \cdot \iint_{S_{\Gamma}} \vec{j} \cdot d\vec{s} = \mu_o \cdot I_{S_{\Gamma}}$$

Courbe *fermée* quelconque Surface définie par Γ Courant électrique traversant la surface S_{Γ}

Nous admettrons que ce résultat est général. Le théorème d'Ampère est l'équivalent magnétique du théorème de Gauss. Les courants électriques sont les *sources* du champ magnétique.

2.5 Forces magnétiques : Force de Lorentz et Force de Laplace

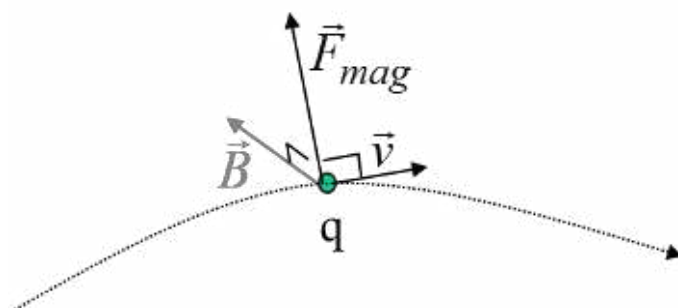
Une charge électrique au repos q_0 est soumise à une force Coulombienne

$$\vec{F} = q_0 \vec{E}$$

L'endroit où se trouve la charge q_0 est caractérisé par le champ électrique \vec{E} . Le champ électrique \vec{E} est créé par la présence d'autres charges électriques. Cette force ne dépend que de la position de la charge q_0

Nous allons voir que les forces magnétiques concernent des charges en mouvement.

2.5.1 Force de Lorentz



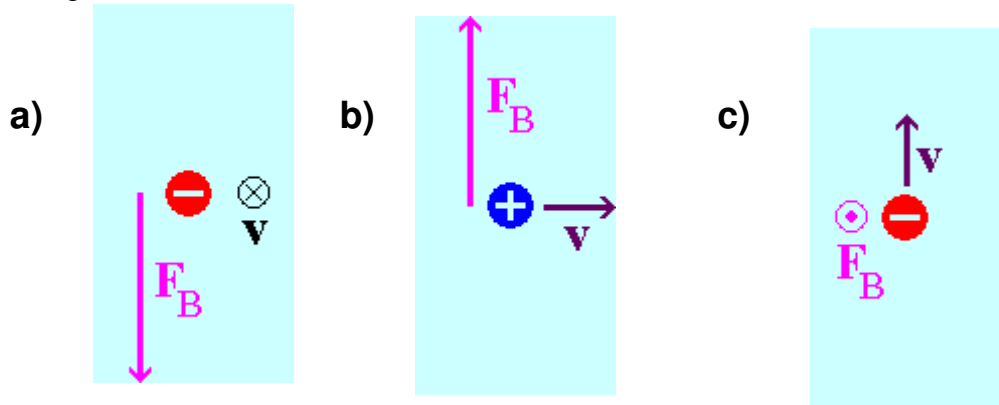
Force magnétique sur une charge électrique q en *mouvement* :

$$\vec{F}_{mag} = q \cdot \vec{v} \wedge \vec{B}$$

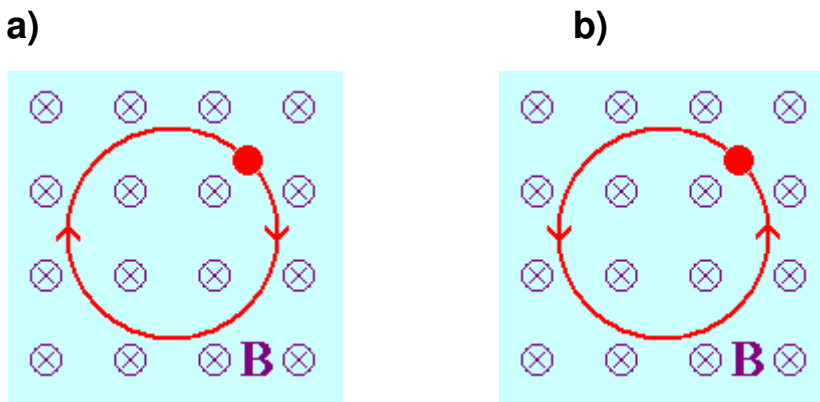
L'endroit où se trouve la charge est caractérisé par un « champ magnétique » $\vec{B}(x, y, z)$.

Ce champ magnétique est créé par *d'autres charges en mouvement* ⁹

Exercices : 1) Laquelle des trois situations correspond à un champ magnétique dirigé vers la gauche ?¹⁰



2) Un électron tourne sur une trajectoire circulaire dans un champ magnétique uniforme. Quelle situation est impossible ?¹¹



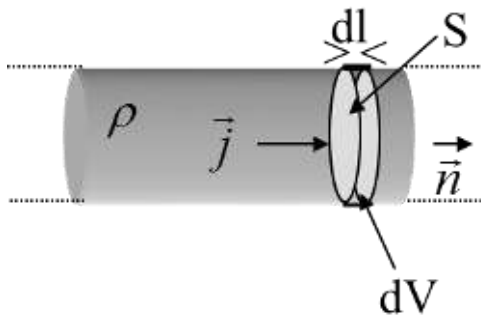
Force de Laplace

Il s'agit de la force magnétique agissant sur un fil parcouru par un courant électrique /

⁹ Les aurores boréales sont la conséquence du piégeage des particules cosmiques par les forces de Lorentz

¹⁰ a)

¹¹ b)



hypothèse: \vec{n} et N sont uniformes, avec $N =$ nombre de charges mobiles par *unité de volume*.

La densité de charges ρ peut s'écrire $\rho = q \cdot N$ et $\vec{j} = \rho \cdot \vec{v} = q \cdot N \cdot \vec{v}$

NdV représente la totalité des charges contenues dans le volume infinitésimal dV

La force magnétique agissant sur le volume dV s'écrit alors :

$$d\vec{F} = dV N \vec{F}_{mag} = dV N q \cdot \vec{v} \wedge \vec{B} = dV \cdot \vec{j} \wedge \vec{B}$$

Soit en explicitant $dV = S \cdot dl$: on a $d\vec{F} = dl \cdot S \cdot \vec{j} \wedge \vec{B}$

Où l'on reconnaît $\|S \cdot \vec{j}\| = I$

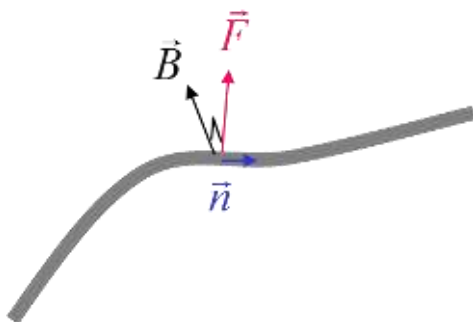
On a alors :

$$\boxed{d\vec{F} = dl \cdot I \cdot \vec{n} \wedge \vec{B}}$$

où \vec{n} est un vecteur unitaire parallèle au fil.

C'est cette formule qui est souvent utilisée. On exprime aussi la force de Laplace par unité de longueur de circuit :

$$\frac{d\vec{F}}{dl} = I \cdot \vec{n} \wedge \vec{B}$$

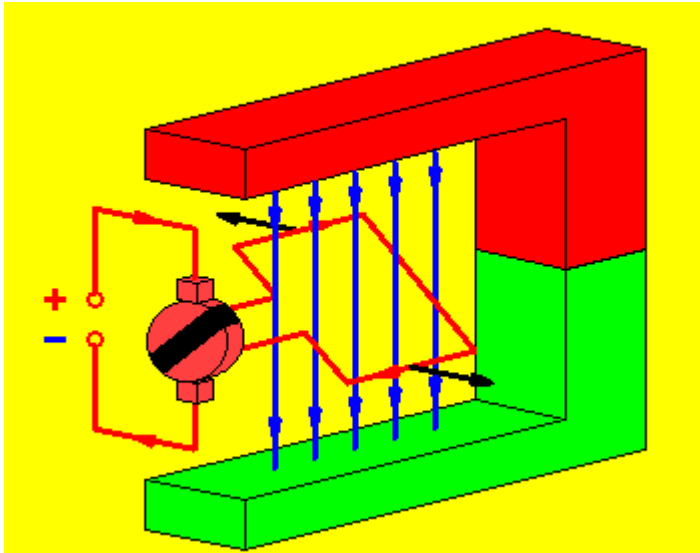


Pour intégrer la force totale il faut connaître la topologie du fil.

Force totale agissant sur le fil:

$$\vec{F} = I \oint d\vec{l} \wedge \vec{B}$$

L'exemple le plus connu de l'application technologique des forces de Laplace est le moteur électrique¹². Ci-dessous un schéma de principe montrant les différents vecteurs en présence.



Le courant électrique circule dans le sens des aiguilles d'une montre (du plus vers le moins). Vous pouvez reconnaître les lignes du champ magnétique, dirigées du pôle nord (en haut) vers le pôle sud (en bas). Les flèches noires représentent la force de Laplace qui est exercée sur un circuit parcouru par un courant et placé dans un champ magnétique. Le rotor tourne dans le sens anti-horaire

La force de Laplace est orthogonale à la direction de l'intensité du courant et à celle du champ magnétique. L'orientation de cette force résulte de l'application de la **règle des trois doigts** (valable pour la main droite uniquement):

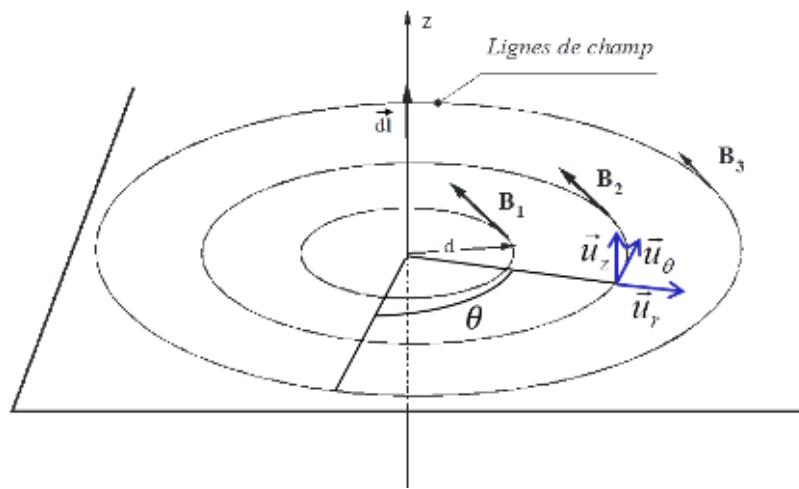
- Pouce:** Sens du courant (*quand on a les deux autres celui-ci est automatique*)
- Index:** Champ magnétique (*penser à **induction***)
- Majeur:** Force de Laplace (*penser au doigt le plus **grand** donc **majeur***)

¹² http://www.walter-fendt.de/ph14f/lorentzforce_f.htm
http://www.walter-fendt.de/ph14f/electricmotor_f.htm

2.6 Exercices corrigés

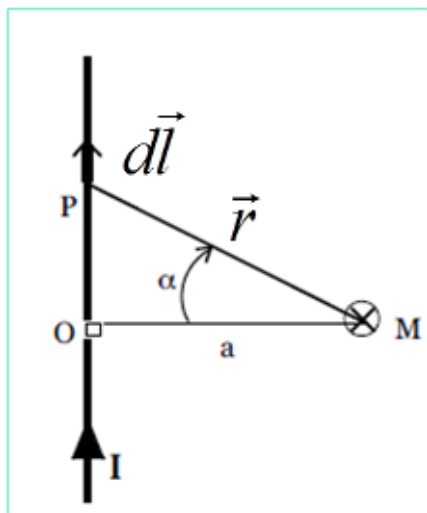
2.6.1 fil rectiligne

On considère un fil rectiligne, infini, parcouru par un courant I permanent. Calculer le champ magnétique en un point à une distance d du fil. On remarquera que la densité de courant possède une invariance par translation selon l'axe z ainsi que par rotation autour de cet axe. Elle possède donc une symétrie cylindrique. Les calculs seront donc plus simples dans le système de coordonnées cylindriques.



Corrigé :

Sens : tire-bouchon donne \vec{B} perpendiculaire à la feuille, dirigé vers l'arrière



$$\vec{r} = PM$$

$$d\vec{l} = dOP$$

En remarquant que la densité de courant ne dépend pas de l'angle, c'est-à-dire:

$$\vec{j}(\rho, \theta, z) = j(\rho)\vec{u}_z$$

le champ magnétique est toroïdal: $\vec{B}(\rho, \theta, z) = B(\rho)\vec{u}_\theta$

Calculons le champ créé en un point M situé à une distance a du fil par un élément dOP vu sous un angle α . La loi de Biot et Savart donne

Par raison de symétrie, seule la composante selon u_θ est non nulle, on ne s'intéresse qu'à celle-ci, c'est à dire

$$d\vec{B} = \frac{\mu_o I}{4\pi} \frac{d\vec{l} \wedge \vec{r}}{r^3}$$

$$B = \int d\vec{B} \cdot \vec{u}_\theta = \int dB_\theta$$

$$dB_\theta = \frac{\mu_o I}{4\pi} \frac{(d\vec{l} \wedge \vec{r}) \cdot \vec{u}_\theta}{r^3}$$

$$dB_\theta = \frac{\mu_o I}{4\pi} \frac{dz r \cos \alpha}{r^3}$$

Grâce à la formule du produit vectoriel : $d\vec{l} \wedge \vec{r} = (\|d\vec{l}\| \times \|\vec{r}\| \times \sin \beta) \vec{u}_\theta$ et comme on peut voir que : $\beta = (\frac{\pi}{2} + \alpha)$, nous pouvons alors écrire avec $\|d\vec{l}\| = dz$:

$$dB_\theta = \frac{\mu_o I}{4\pi} \frac{dz \cos \alpha}{r^2}$$

$$z = r \sin \alpha$$

$$z = a \tan \alpha$$

$$dz = \frac{a}{\cos^2 \alpha} d\alpha$$

En remplaçant l'expression de dz dans l'équation précédente et sachant que $r = a \sec \alpha$ Il vient :

$$dB_\theta = \frac{\mu_o I}{4\pi} \frac{a}{\cos^2 \alpha} \frac{d\alpha \cos^2 \alpha}{a^2} \cos \alpha$$

$$dB_\theta = \frac{\mu_o I}{4\pi} \frac{\cos \alpha}{a} d\alpha$$

En intégrant sur tout le fil :

$$B = \frac{\mu_o I}{4\pi a} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos \alpha d\alpha$$

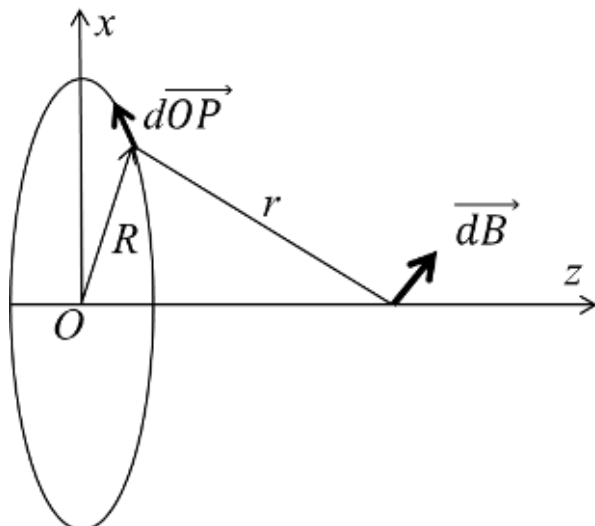
$$B = \frac{\mu_o I}{2\pi a}$$

On vérifiera que le calcul direct du produit mixte $(d\vec{l} \wedge \vec{r}) \cdot \vec{u}_\theta$ en coordonnées cartésiennes donne le même résultat :

$$d\vec{l} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ dz \end{pmatrix} \wedge \vec{r} \begin{pmatrix} r \cos \alpha \cos \theta \\ r \cos \alpha \sin \theta \\ -z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -r \cos \alpha \sin \theta dz \\ r \cos \alpha \cos \theta dz \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{u}_\theta \begin{pmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$(\vec{dl} \wedge \vec{r}) \cdot \vec{u}_\theta = r \cos \alpha dz$$

Considérons une spire circulaire de rayon R , parcourue par un courant I .



Repérer les éléments de symétrie et écrire \vec{dB} sous la forme vectorielle:

$$\vec{dB}(\rho, z) = dB_\perp(\rho, z) \vec{u}_\perp + dB_z(\rho, z) \vec{u}_z$$

avec $\vec{dB}_\perp = dB_\perp(\rho, z) \vec{u}_\perp$ composante perpendiculaire à z et $\vec{dB}_z = dB_z(\rho, z) \vec{u}_z$ composante parallèle à z . On montrera que l'on peut s'intéresser ici uniquement à la composante B_z du champ magnétique que l'on projettera sur l'axe z de la spire.

Indication : On utilisera la loi de Biot et Savart ¹³:

$$\vec{dB} = \frac{\mu_0 I d\vec{OP} \wedge \vec{r}}{4\pi r^3}$$

¹³ le terme en r^3 au dénominateur provient de la normalisation du vecteur unitaire $\vec{u} = \frac{\vec{r}}{r}$ porté par la direction PM.

On a bien $\|\vec{PM}\| = r$ et une loi en $\frac{1}{r^2}$

Les ouvrages en anglais pourront proposer cette formule:

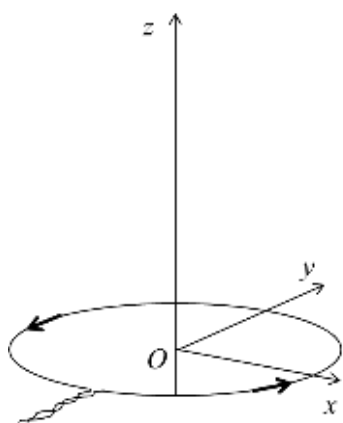
$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi r^2} d\mathbf{l} \times \hat{\mathbf{r}}$$

dans laquelle la notation vectorielle usuelle (lettre accentuée avec une flèche), est remplacée par des caractères **gras** sans flèche, l'élément de circuit est noté $d\mathbf{l}$, ce qui revient à écrire formellement $\vec{dOP} = d\mathbf{l}$, le vecteur unitaire est symbolisé par $\hat{\mathbf{r}}$, (avec un petit chapeau au-dessus), tandis que le produit vectoriel connu aussi sous le nom de « ET logique » \wedge est remplacé par le symbole \times ; comme on a affaire à des vecteurs, il n'y a pas d'ambiguïté.

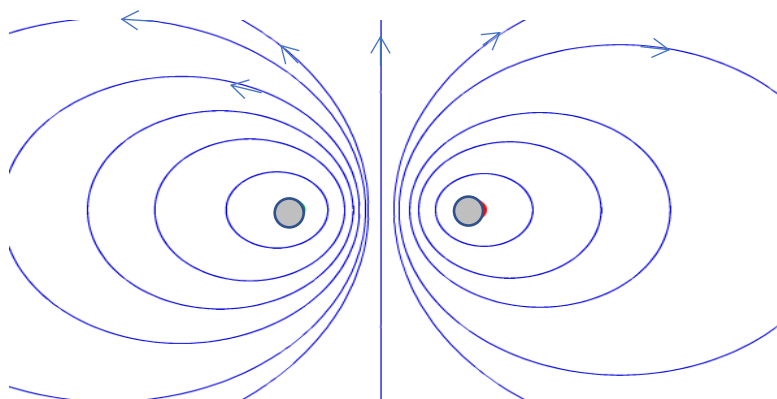
Avec $d\vec{OP}$ un élément de fil au point P parcouru par un courant I , \vec{r} le vecteur entre le point P et le point M où l'on observe le champ magnétique $d\vec{B}$.

Correction de l'exercice 2.6.2

Nous pouvons prédire sans aucun calcul que le champ magnétique de cette source (cf dessin ci-dessous à gauche) doit ressembler au graphique ci-dessous (à droite) :

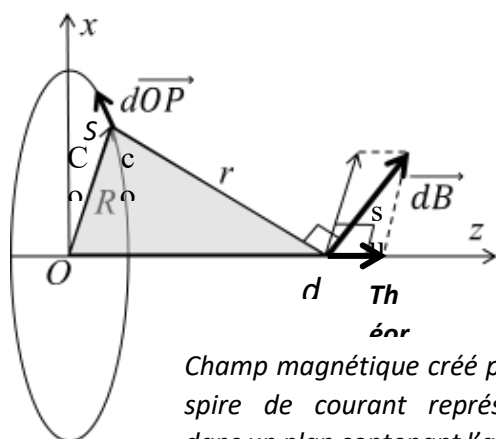


Γ



soit:

En effet le champ doit avoir une symétrie de rotation autour de l'axe z et les lignes de champ doivent être symétriques par rapport au plan de la spire, le plan xy . Très près



Champ magnétique créé par la spire de courant représenté dans un plan contenant l'axe de symétrie

du conducteur, le champ doit ressembler à celui régnant près d'un long fil rectiligne, puisque les autres parties semblent très éloignées de la spire et jouent donc un rôle au second ordre.

Au final seule la somme des composantes sur l'axe z des contributions élémentaires $d\vec{B}$ sera à prendre en compte (le champ total n'ayant pas de composante perpendiculaire à z)

Chaque élément de longueur $d\vec{OP}$ de l'anneau fournit une contribution $d\vec{B}$ perpendiculaire à \vec{r} . Il suffit de considérer la composante z de $d\vec{B}$ puisque nous avons vu que le champ total que l'on veut calculer doit être porté par l'axe z

Donc en posant $\|d\vec{OP}\| = dl$ on a:

$$dB_z = \frac{\mu_0 I dl}{4\pi r^2} \cos \theta = \frac{\mu_0 I dl R}{4\pi r^2 r}$$

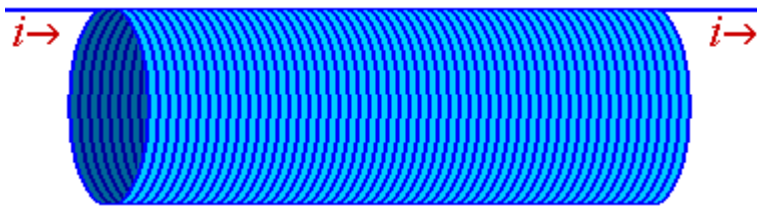
En intégrant sur toute la spire et en remarquant que $dl = R d\alpha$ avec $\alpha = \widehat{Ox, OP}$ nous obtenons :

$$B_z = \int_{\alpha=0}^{\alpha=2\pi} dB_z = \int_0^{2\pi} \frac{\mu_0 I R^2}{4\pi r^3} d\alpha = \frac{\mu_0 I R^2}{4\pi r^3} \int_0^{2\pi} d\alpha$$

Soit :

$$B(z) = \frac{\mu_0 I R^2}{2r^3} = \frac{\mu_0 I R^2}{2(R^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

2.6.2 Champ magnétique produit par un solénoïde

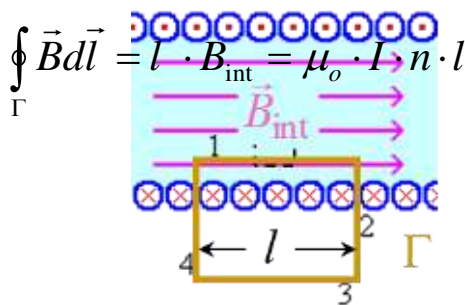


Par symétrie: en tout point de l'espace $\vec{B} \parallel$ à l'axe du solénoïde (loin du bord)



On peut montrer que pour un solénoïde suffisamment long on a $B_{ext} = 0$.

Champ à l'intérieur du solénoïde :



$$\rightarrow B_{int} = \mu_0 \cdot I \cdot n$$

θ

2.6.3 Origine du champ d'un aimant permanent

Illustration montrant les lignes de champ produites par un aimant permanent rectiligne.

L'aimant est caractérisé par deux pôles « Nord et Sud »

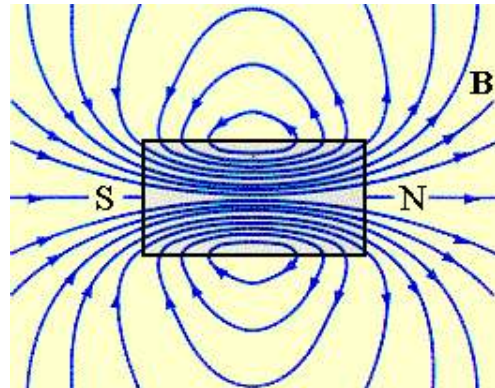
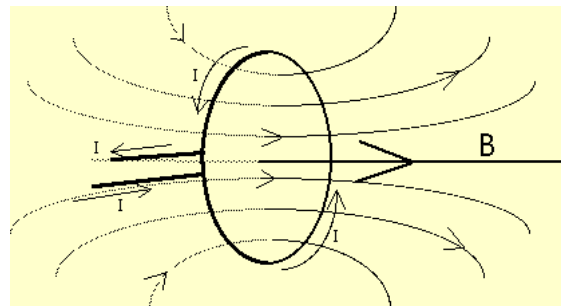
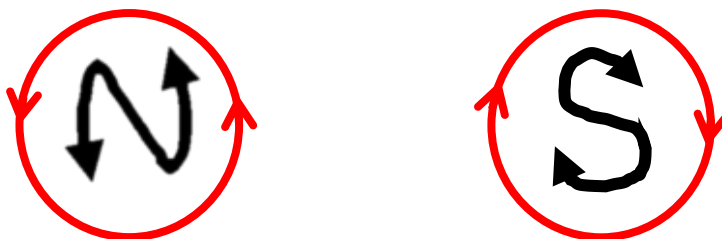


Illustration montrant les lignes de champ produites par une boucle de courant.

L'analogie avec les courants électriques trouve son fondement dans le fait que les aimants sont constitués de « boucles de courants » microscopiques. Toute charge électrique *en mouvement* représente un courant et donc produit un champ magnétique.



Astuce pour trouver rapidement le sens du champ magnétique d'une spire de courant:



Les lettres pour chaque pôle Nord et Sud ont le sens du courant, comme indiqué sur le dessin, et le champ magnétique est alors orienté de telle façon qu'il sort de N et rentre dans S.

Remarque : le pôle nord terrestre indiqué N est en fait un pôle sud magnétique noté S !! L'aiguille d'une boussole est constituée d'un petit aimant mobile sur un axe qui indique bien un pôle « Sud » au sens magnétique.

